

**Debreceni Egyetem  
Természettudományi és Technológiai Kar  
Matematikai Intézet**

# **OKLEVÉLKÖVETELMÉNYEK**

**MATEMATIKUS  
MESTERKÉPZÉSI SZAK**  
(2022 kezdéssel)

# Matematikus mesterszak

A mesterképzési szak megnevezése: *matematikus (Mathematics)*

Szakfelelős: *Dr. Páles Zsolt egyetemi tanár*

Szerezhető végzettségi szint és szakképzettség oklevélben szereplő megjelölése:

Végzettségi szint: *mesterfokozat (MSc)*

Szakképzettség: *okleveles matematikus (Mathematician)*

## Képesítési követelmények

1. Összesen 120 kredit megszerzése az alábbiak szerint:
  - Alapozó ismeretek 0–20 kredit
  - Szakmai törzsanyag 40 kredit
  - Speciális modulok 34–54 kredit
  - Diplomamunka 20 kredit
  - Szabadon választható tárgyak 6 kredit
2. Államilag elismert legalább középfokú komplex típusú nyelvvizsga
3. Testnevelési követelmények teljesítése (egy félév kötelező)

**Felvételi:** Matematikus MSc szakra feltétel nélkül jelentkezhetnek a matematika BSc diplomával rendelkezők. Feltételesan fogadhatók el elsősorban a természettudományi, műszaki, informatikai, valamint gazdaságtudományi képzési területek alapképzési szakjai. Ebben az esetben a belépéshez szükséges minimálisan 65 kredit a korábbi tanulmányokból az algebra, analízis, geometria, halmazelmélet, kombinatorika, matematikai logika, operációkutatás, számelmélet, valószínűségszámítás, statisztika területeiről. Ezen belül legfeljebb 10 kredittel beszámíthatók kiterjedt matematikai apparátusra épülő más tárgyak is. A felvétel feltétele, hogy a hallgató a korábbi tanulmányai alapján legalább 50 kredittel rendelkezzen, a hiányzó krediteket az egyetem szabályzatában meghatározottak szerint kell megszerezni.

A felvételi vizsga szóbeli, felvételi bizottság előtt történik. Célja a jelentkezők szakmai tájékozottságának, motivációjának, valamint eddigi szakmai tevékenységének felmérése.

**Alapozó ismeretek:** A matematika BSc végzettséggel rendelkezők automatikusan felmentésben részesülnek ezen tárgyak alól. A más szakról érkezők esetében kreditelismerés alapján a Matematikai Intézet határozza meg, hogy a hallgatónak mely alapozó tárgyakat kell teljesítenie. A felmentések kreditjeinek terhére a speciális modulokba tartozó tárgyak teljesítendőek.

**Szabadon választható tárgyak:** A matematikus MSc szakon 6 kredit szabadon választható tárgy teljesítendő.

Szabadon választható tárgyak az alkalmazott matematikus MSc (matematikus MSc szakon nem szereplő) tárgyai, valamint a DE egyéb szakjain meghirdetett nem matematikai tárgyak (például szaknyelvi félév). Ide számolhatóak el továbbá a differenciált szakmai anyag túlteljesített tárgyai. Ebben az esetben fontos, hogy minden tantárgy teljes kreditmennyiséggel és csak egyetlen tárgycsoportba sorolható be.

**Diplomamunka:** A hallgatóknak diplomamunka témát tanulmányaik 2. félévében kell választaniuk. Elkészítésére két félév áll rendelkezésre. A dolgozat terjedelme kb. 25–40 gépelt oldal, megírására a LaTeX dokumentumszerkesztő rendszer használata támogatott. A dolgozat fedőlapja tartalmazza az intézmény nevét, a dolgozat címét, készítőjének nevét a szak feltüntetésével, a témavezető nevét és beosztását. A dolgozatban kifejtett téma részletes tárgyalása mellett elvárt részként tartalmaznia kell bevezetést, tartalom- és irodalomjegyzéket. A diplomamunkát a témának megfelelően kijelölt háromfős bizottság előtt meg kell védeni.

**Záróvizsga:** A záróvizsga szóbeli vizsga, melyet a Matematikai Intézet igazgatója által kijelölt, a Természettudományi és Technológiai Kar vezetése által jóváhagyott záróvizsga bizottság előtt kell letenni. A záróvizsga tételei a szakmai törzsanyagot és a speciális modulok tárgyainak anyagát ölelik fel. A vizsgázó a törzsanyag tételeiből egy tételt húz, felkészülési időt követően ebből felel. Ezután egy másik törzsanyag tételeből és egy további, a hallgató főmoduljaiból (amiből legalább 10 kreditet teljesített) választott tételből ad a bizottság egy-egy kisebb fejezetet úgy, hogy a három tétel lényegesen különböző tárgykörű legyen, melyekből külön felkészülési időt követően felel a vizsgázó. A bizottság a záróvizsga feleletet egy jeggyel értékeli.

**Idegennyelvi követelmények:** A mesterfokozat megszerzéséhez egy élő idegen nyelvből államilag elismert középfokú (B2), komplex típusú nyelvvizsga vagy ezzel egyenértékű érettségi bizonyítvány vagy oklevél szükséges.

**Testnevelés:** A Debreceni Egyetem mesterképzésben résztvevő hallgatóinak egy féléven keresztül heti két óra testnevelési foglalkozáson való részvétel kötelező. A testnevelési követelmények teljesítése a végbizonyítvány (abszolutórium) kiállításának feltétele. A testnevelés kurzus 1 kredit/félév kreditértékű.

**Munkavédelem:** A végbizonyítvány (abszolutórium) kiállításának előfeltétele a **Munkavédelem kurzus teljesítése**. A kurzus 1 kredit/félév kreditértékű.

**Diploma minősítése:** Az oklevél minősítése az alábbi részjegyek átlagának figyelembevételével történik:

- a tanulmányok egészére számított súlyozott tanulmányi átlag,
- a diplomamunkára és a védésre a védési bizottság által adott jegyek átlaga,
- a szakmai felelet eredménye a záróvizsgán.

## Matematikus mesterszak

Az ajánlott tantervi hálóban az egyes tantárgyakhoz javasolt félévek csak tájékoztató jellegűek, az előfeltételekre való odafigyeléssel bizonyos tárgyak teljesíthetők a megjelölthöz képest egy tanévvel később vagy korábban is.

A hálótervben egyes előadások esetén az előfeltétel oszlopában (p) megjelöléssel szerepel a tantárgy vele párhuzamosan hallgatandó, gyakorlati jeggyel záruló gyakorlata. Ebben az esetben a tárgy felvételének természetesen nem előfeltétele a gyakorlat, de vizsgázni csak a gyakorlat sikeres teljesítése esetén lehet. Továbbá lehetőség van a gyakorlat előadás nélküli felvételére, azonban a gyakorlat oktatója elvárhatja annak hallgatóitól az előadás anyagának ismeretét.

### Alapozó ismeretek

Kód	Tantárgynév	Kredit	Heti óraszám		Számonkérés	Előfeltételek	Jav. félév
			Elm.	Gyak.			
TTMME0101	Bev. a modern algebrába	3	2		K	TTMMG0101(p)	1
TTMMG0101	Bev. a modern algebrába	2		2	Gy		1
TTMME0201	Bev. a modern analízisbe	3	2		K	TTMMG0201(p)	1
TTMMG0201	Bev. a modern analízisbe	2		2	Gy		1
TTMME0301	Fejezetek a geometriából	3	2		K	TTMMG0301(p)	1
TTMMG0301	Fejezetek a geometriából	2		2	Gy		1
TTMME0401	Valószínűségelmélet	3	2		K	TTMMG0401(p)	1
TTMMG0401	Valószínűségelmélet	2		2	Gy		1

### Szakmai törzsanyag

A felsorolt tantárgyak mindegyike kötelező tárgy.

Kód	Tantárgynév	Kredit	Heti óraszám		Számonkérés	Előfeltételek	Jav. félév
			Elm.	Gyak.			
TTMME0102	Algebrai számelmélet	3	2		K	TTMMG0102(p)	1
TTMMG0102	Algebrai számelmélet	2		2	Gy		1
TTMME0103	Modern algebra	3	2		K	TTMMG0103(p)	2
TTMMG0103	Modern algebra	2		2	Gy		2
TTMME0203	Funkcionálanalízis	3	2		K	TTMMG0203(p)	1
TTMMG0203	Funkcionálanalízis	2		2	Gy		1
TTMME0204	Parciális diff. egyenletek	3	2		K	TTMMG0204(p)	2
TTMMG0204	Parciális diff. egyenletek	2		2	Gy		2
TTMME0302	Modern differenciálgeom.	3	2		K	TTMMG0302(p)	1
TTMMG0302	Modern differenciálgeom.	2		2	Gy		1
TTMME0303	Véges geom. és kódelmélet	3	2		K	TTMMG0303(p)	2
TTMMG0303	Véges geom. és kódelmélet	2		2	Gy		2
TTMME0104	Gráfelmélet és alkalm.	3	2		K	TTMMG0104(p)	1
TTMMG0104	Gráfelmélet és alkalm.	2		2	Gy		1
TTMME0402	Sztocaszt. folyamatok	3	2		K	TTMMG0402(p)	2
TTMMG0402	Sztocaszt. folyamatok	2		2	Gy		2

## Speciális modulok

A felsorolt tantárgyakból az alapozó ismeretek alóli felmentésektől függően 34–54 kreditet kell teljesíteni úgy, hogy legalább három modulból teljesítendő legalább 10–10 kredit. A többi modulból teljesíthető kevesebb kredit.

(A megadott javasolt félévek azt jelölik, hogy az alkalmazott matematikus MSc szak tantervi hálója szerint melyik félévben várható az adott tantárgy meghirdetése. A csillaggal megjelölt tárgyakat a tanszékek eseti jelleggel hirdetik a hallgatói igényeket is figyelembe véve.)

### ALGEBRA MODUL

Kód	Tantárgynév	Kredit	Heti óraszám		Számonkérés	Előfeltételek	Jav. félév
			Elm.	Gyak.			
TTMME0105	Véges testek és alkalm.	3	2		K	TTMMG0105(p)	2
TTMMG0105	Véges testek és alkalm.	2		2	Gy		2
TTMME0111	Algebrai kódelmélet	3	2		K	TTMME0105 TTMMG0111(p)	3
TTMMG0111	Algebrai kódelmélet	2		2	Gy	TTMME0105	3
TTMME0113	Kommutatív algebra	4	2	1	K	TTMME0103	*
TTMME0114	Véges csoportok és reprezent.	4	2	1	K	TTMME0103	*
TTMME0115	Modellelmélet	4	2	1	K	TTMME0103	*
TTMMG0116	Fejezetek az algebrából	2		2	Gy		*

### SZÁMELMÉLET MODUL

Kód	Tantárgynév	Kredit	Heti óraszám		Számonkérés	Előfeltételek	Jav. félév
			Elm.	Gyak.			
TTMME0117	Algebrai geometria	4	2	1	K		*
TTMME0118	Algor. diofantikus egy. mo.	4	2	1	K	TTMME0102	*
TTMME0119	Diofantikus egyenletek	4	2	1	K		*
TTMME0120	Effektív módsz. diof. egy.	3	2		K	TTMME0102 TTMMG0120(p)	*
TTMMG0120	Effektív módsz. diof. egy.	2		2	Gy	TTMME0102	*
TTMME0121	Elliptikus görbék	3	2		K		*
TTMME0122	Prímszámelmélet	3	2		K		*

### DISZKRÉT MATEMATIKA MODUL

Kód	Tantárgynév	Kredit	Heti óraszám		Számonkérés	Előfeltételek	Jav. félév
			Elm.	Gyak.			
TTMME0108	Kombinatorika és alkalm.	3	2		K	TTMMG0108(p)	2/4
TTMMG0108	Kombinatorika és alkalm.	2		2	Gy		2/4
TTMME0107	Diszkrét optimalizálás	3	2		K	TTMMG0107(p)	2/4
TTMMG0107	Diszkrét optimalizálás	2		2	Gy		2/4
TTMME0106	Matematikai algoritmusok	3	2		K	TTMME0104 TTMMG0106(p)	2/4
TTMMG0106	Matematikai algoritmusok	2		2	Gy	TTMME0104	2/4

ANALÍZIS MODUL

Kód	Tantárgynév	Kred- dit	Heti óraszám		Számon- kérés	Előfeltételek	Jav. fél- év
			Elm.	Gyak.			
TTMME0207	Köz. diff.egyenletek alk.	3	2		K	TTMMG0207(p)	1/3
TTMMG0207	Köz. diff.egyenletek alk.	2		2	Gy		1/3
TTMME0209	Ortogonalis polinomok	3	2		K		*
TTMME0210	Topologikus fixponttételek	3	2		K		*
TTMME0211	Iteratív fixponttételek	3	2		K		*
TTMME0212	Banach-algebrák	3	2		K		*
TTMME0213	Fejezetek a funkcionálanal.	3	2		K		*
TTMME0214	Függvényegyenletek	3	2		K		*
TTMME0215	Függvényegyenlőtlenségek	3	2		K		*
TTMME0216	Disztribúciók és integráltr.	3	2		K		*
TTMME0217	Absztrakt harmonikus anal.	3	2		K		*
TTMME0218	Nemsima analízis	3	2		K		*
TTMME0219	Approximációelmélet	4	2	1	K		*
TTMME0224	Fourier-sorok	3	2		K	TTMMG02??(p)	1/3
TTMMG0224	Fourier-sorok	2		2	Gy		1/3
TTMME0220	Többvált. Fourier-sorok	3	2		K		*
TTMME0221	Differenciászámítás	3	2		K		*

GEOMETRIA MODUL

Kód	Tantárgynév	Kred- dit	Heti óraszám		Számon- kérés	Előfeltételek	Jav. fél- év
			Elm.	Gyak.			
TTMME0304	Geometriai szerkeszt. elm.	3	2		K		*
TTMME0305	Geometriai transzf.csop.	3	2		K	TTMMG0305(p)	*
TTMMG0305	Geometriai transzf.csop.	2		2	Gy		*
TTMME0306	Riemann-geometria	4	2	1	K	TTMME0302	*
TTMME0307	Algebrai topológia	3	2		K		*
TTMME0308	Bev. a Finsler-geometriába	3	2		K	TTMME0302	*
TTMME0309	Variációszámítás	3	2		K		*
TTMME0310	Vektoranal. sokaságokon	3	2		K		*
TTMME0311	Differenciálrsz. geom. elm.	3	2		K		*
TTMME0312	Felületelmélet	4	2	1	K		*
TTMME0313	Diff.geom. számítóg. tám.	3	2		K	TTMMG0313(p)	*
TTMMG0313	Diff.geom. számítóg. tám.	2		2	Gy		*
TTMME0314	Konvex geometria alkalm.	3	2		K		*
TTMME0315	Differenciáltopológia	3	2		K		*
TTMME0316	Robotmodell. és kontrollal.	3	2		K		*
TTMME0317	Lie-csoportok és Lie-alg.	3	2		K		*

OPERÁCIÓKUTATÁS MODUL

Kód	Tantárgynév	Kred- dit	Heti óraszám		Számon- kérés	Előfeltételek	Jav. fél- év
			Elm.	Gyak.			
TTMME0208	Játékelmélet	3	2		K	TTMMG0208(p)	2/4
TTMMG0208	Játékelmélet	2		2	Gy		2/4
TTMME0205	Konvex optimalizálás	3	2		K	TTMMG0205(p)	1/3
TTMMG0205	Konvex optimalizálás	2		2	Gy		1/3
TTMME0222	Extrémum problémák	3	2		K		*
TTMME0223	Optimális folyamatok	3	2		K		*

## SZTOCHASZTIKA MODUL

Kód	Tantárgynév	Kredit	Heti óraszám		Számonkérés	Előfeltételek	Jav. fél-év
			Elm.	Gyak.			
TTMME0403	Többváltozós statisztika	3	2		K	TTMMG0403(p)	1/3
TTMMG0403	Többváltozós statisztika	2		2	Gy		1/3
TTMME0408	Idősorok elemzése	4	2	1	K	TTMME0402	4
TTMME0404	Opcióértékelés	3	2		K	TTMMG0404(p)	1/3
TTMMG0404	Opcióértékelés	2		2	Gy		1/3
TTMME0407	Biztosítási matematika	3	2		K		2/4
TTMME0411	Információelmélet	4	2	1	K		2/4
TTMME0412	Statiszt. tanuló algoritm.	4	2	1	K		*

**Diplomamunka, szabadon választható tárgyak**

Kód	Tantárgynév	Kredit	Heti óraszám		Számonkérés	Előfeltételek	Jav. fél-év
			Elm.	Gyak.			
TTMMG0703	Diplomamunka 1.	10			Gy		3
TTMMG0704	Diplomamunka 2.	10			Gy	TTMMG0703	4
	Szabadon választható	6					

# Tantárgyi tematikák

## Alapozó ismeretek

### **TTMME0101, TTMMG0101**

#### **Bevezetés a modern algebra**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Pongrácz András**

**Előfeltétele: nincs**

Sylow tételei. Szemidirekt szorzat. A  $p$ -csoportok maximális részcsoportjai  $p$  indexű normálosztók. Karakterisztikus részcsoportok, kommutátor. Feloldható csoportok és alaptulajdonságaik. Az alternáló csoportok egyszerűségéről szóló tétel. Szabad csoportok és definiáló relációk. Dyck-tétel. Számelmélet gyűrűkben: maximumfeltétel és az alaptételes gyűrűk jellemzése. Hányadostest. Artin- és Noether-gyűrűk, Hilbert bázistétele. Algebrák, a minimálpolinom tárgyalása algebrák felett. Frobenius-tétel. A felbontási test egyértelműsége, algebrai lezárt létezése. Normális bővítések, tökéletes test felett minden véges bővítés egyszerű. A Galois-elmélet főtétele. Az algebra alaptétele. Geometriai szerkeszthetőség. Egyenlet gyökjelekkel való megoldhatósága, a Casus Irreducibilis elkerülhetetlensége harmadfokú egyenletre.

#### Irodalom:

Bálintné Szendrei Mária - Czédli Gábor - Szendrei Ágnes: Absztrakt algebrai feladatok, 2005, Polygon.

Kiss Emil: Bevezetés az algebra, Elméleti matematika sorozat. Budapest, 2007, Typotex.

### **TTMME0201, TTMMG0201**

#### **Bevezetés a modern analízisbe**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Gát György**

**Előfeltétele: nincs**

Metrikus terek, kompakt halmazok, szeparabilitás, Baire kategóriatétele és következményei, Hahn–Banach-tétel és következményei, normált tér, Banach-tér, Schauder-bázis,  $L(X,Y)$  és  $B(X,Y)$  terek, nyílt leképezések tétele és következményei, zárt gráf tétel, egyenletes korlátosság tétele, Banach–Steinhaus-tételek.

#### Irodalom:

Járai A.: Modern alkalmazott analízis, Typotex Könyvkiadó, 2007.

A. A. Kirillov, A. D. Gvisiani: Feladatok a funkcionálanalízis köréből, Tankönyvkiadó, 1985.

A. N. Kolmogorov, Sz. V. Fomin: A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei, Műszaki Könyvkiadó, 1981.

Losonczi L.: Funkcionálanalízis I, Tankönyvkiadó, 1982.

Riesz F., Szőkefalvi-Nagy B.: Funkcionálanalízis, Tankönyvkiadó, 1988.

### **TTMME0301, TTMMG0301**

#### **Fejezetek a geometriából**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Kozma László**

**Előfeltétele: nincs**

Differenciálható görbék. Görbület, torzió. A görbeelmélet alaptétele. Felületek az euklideszi térben, különböző megadási módjaik. A felület metrikus alapformája. Normálgörbület, főgörbületek, főirányok, szorzat- és összeggörbület. Az ívhossz variációs problémája. Geodetikusok. Geodetikus görbület. A geodetikusok minimalizáló tulajdonsága. Affin és projektív síkok axiómái. Affin síkok (például az euklideszi sík) projektív bővítése. A dualitás elve. A projektív síkok vektortér-modellje, homogén koordináták. Perspektivítások (centrális vetítések) és projektivítások. Pont- és sugárnégyes kettőviszonya, a Papposz-Steiner-tétel. Desargues és Papposz tételei. Teljes négyszög, teljes négyoldal, harmonikus pont- és sugárnégyesek. Kollineációk, a projektív geometria alaptétele. A párhuzamossági axióma jelentősége, a hiperbolikus geometria felfedezése. A hiperbolikus síkgeometria Cayley-Klein-modellje, a Poincaré-féle körmodell és félsíkmodell. Az egybevágósági transzformációk leírása a modellekben. Gömbi geometria: távolságmérés a gömbön, gömbháromszögekkel kapcsolatos tételek. Elliptikus metrika.

#### Irodalom:

Kozma László, Kovács Zoltán: Görbék és felületek elemi differenciálgeometriája, (jegyzet).

Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

H. S. M. Coxeter: Projektív geometria, Gondolat, 1986.

Csikós Balázs, Kiss György: Projektív geometria, Polygon, 2011.  
Kurusa Árpád: Nemeuklideszi geometriák, Polygon, 2009.  
Reiman István: Geometria és határterületei, Szalay Kft, 2001.

#### **TTMME0401, TTMMG0401**

##### **Valószínűségelmélet**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Fazekas István**

**Előfeltétele: nincs**

Valószínűség, valószínűségi változók, eloszlások. A valószínűségszámítás aszimptotikus tételei.

##### Irodalom:

Fazekas István: Valószínűségszámítás. Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen, 2009.

Csörgő Sándor: Fejezetek a valószínűségelméletből, Szegedi Egyetemi Kiadó, Polygon, 2010.

Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

A. N. Shiryaev: Probability, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

### **Szakmai törzsanyag**

#### **TTMME0102, TTMMG0102**

##### **Algebrai számelmélet**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Bérczes Attila**

**Előfeltétele: nincs**

Algebrai számok, algebrai egészek. Algebrai számtestek egészeinek gyűrűje. Modulusok, rendek algebrai számtestekben. A Dirichlet-féle egységétel. Ideálok, alaptételes gyűrűk. Törtideálok. Prímideál-faktorizáció és következményei algebrai számtestek gyűrűjében. Ideál normája, ideál-osztálycsoport, ideál-osztályszám.

##### Irodalom:

Bérczes Attila, Algebrai számelmélet, jegyzet.

Borevich, Shafarevich: Algebraic Number Theory, Academic Press, 1966.

#### **TTMME0103, TTMMG0103**

##### **Modern algebra**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Pongrácz András**

**Előfeltétele: nincs**

Permutációcsoportok, csoportthatás, imprimitivitási tartományok, primitív csoportok, többszörös tranzitivitás. Talapzat. Burnside tétele Abel-féle normálosztóval rendelkező primitív csoportokról.  $A_n$  egyszerű. Frobenius csoportok, koszorúsorozat, alkalmazások. O'Nan-Scott-tétel és következményei,  $S_n$  maximális részcsoportjai. Modulusok, főideálgyűrűk feletti végesen generált modulusok alaptétele, alkalmazások. Artin-, Noether-gyűrűk, mátrixgyűrűk balideáljai, ideáljai. Jacobson-radikál, Nakayama-lemma, algebrai egészek gyűrűt alkotnak. Féligegyszerű gyűrűk. Wedderburn-Artin-tétel, Jacobson-féle sűrűségi tétel. Csoportalgebrák, Maschke-tétel, reprezentációk, karakterek. Ortogonalitási relációk, Burnside kétprímestétele.

##### Irodalom:

Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: Absztrakt algebrai feladatok, Polygon, 2005.

Kiss Emil: Bevezetés az algebraba, Elméleti matematika sorozat. Budapest, Typotex, 2007.

Derek J. S. Robinson: A Course in the Theory of Groups, Springer, New York, 1982.

John D. Dixon, Brian Mortimer: Permutation Groups, Springer, New York, 1996.

#### **TTMME0203, TTMMG0203**

##### **Funkcionálanalízis**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Páles Zsolt**

**Előfeltétele: nincs**

Hilbert-tér, az ortogonális felbontás tétele, Fourier-sorok, Bessel-egyenlőtlenség, Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás, Riesz-tétel, adjungált és önadjungált operátorok, projekciók, kompakt operátorok Hilbert-tereken, a  $K(H)$  zártsága, kompakt operátorok spektruma, Fredholm-alternatíva, kompakt önadjungált és normális operátorok spektráلتétele, függvénykalkulus kompakt normális operátorokra, pozitív operátorok, Hilbert-Schmidt-operátorok, nem korlátos operátorok Hilbert-tereken.

Irodalom:

- Járai A.: Modern alkalmazott analízis, Typotex Könyvkiadó, 2007.  
J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, Springer, 1989.  
N. J. Dunford, J. T. Schwartz: Linear Operators, Interscience Publishers, 1957.  
N. I. Akhiezer, I. M. Glazman: Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Dover Publications, 1993.

**TTMME0204, TTMMG0204**

**Parciális differenciálegyenletek**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Fazekas Borbála**

**Előfeltétele: nincs**

Fizikai példák. Elsőrendű egyenletek: homogén lineáris egyenletek, kvázilineáris egyenletek, illetve általános egyenletekre vonatkozó Cauchy-feladatok. Magasabb rendű egyenletek, a Cauchy–Kovalevszkaja-tétel. Egy-, kettő-, illetve háromdimenziós hullámegyenlet. Inhomogén hullámegyenlet. Poisson-egyenlet, Green-függvények, harmonikus függvények, maximum-elv. A Laplace- és a Poisson-egyenletre vonatkozó kezdetiérték-feladat. A hővezetési egyenlet. Szoboljev-terek, gyenge megoldások.

Irodalom:

- V. I. Arnold: Lectures on partial differential equations, Springer, Berlin, 2004  
Besenyei Ádám, Komornik Vilmos, Simon László: Parciális differenciálegyenletek, TypoTeX Budapest, 2013.  
Czách László, Simon László: Parciális differenciálegyenletek, 1. félév, ELTE jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.  
Simon László: Parciális differenciálegyenletek, 2. félév, ELTE jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.  
Simon László, E. A. Baderko: Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.  
Székelyhidi László: Elsőrendű parciális differenciálegyenletek, KLTE egyetemi jegyzet, Debrecen, 1980.  
V. Sz. Vlagyimirov: Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.  
V. Sz. Vlagyimirov: Parciális differenciálegyenletek feladatgyűjtemény, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.

**TTMME0302, TTMMG0302**

**Modern differenciálgeometria**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Tran Quoc Binh**

**Előfeltétele: nincs**

Topologikus sokaságok, alapvető példák és konstrukciók (gömbök, tóruszok, valós projektív sík, Klein-palack, Möbius-szalag). Sima sokaságok, sima leképezések és diffeomorfizmusok. Beágyazott részsokaságok az  $n$  dimenziós valós vektortérben, Whitney tétele. Beágyazott részsokaság érintőtere, az érintővektorok és a derivációk azonosítása. Az érintővektorok absztrakt definíciója, sokaság érintőnyalábja, sima leképezések deriváltja. Vektormezők és közönséges differenciálegyenletek. A vektormezők Lie-algebrája, a Lie-zárójel geometriai jelentése, kommutáló vektormezők. Kovariáns deriválás sokaságokon, görbementi vektormezők kovariáns deriváltja, geodetikusok. A görbületi és a torzió tenzor, az algebrai és a differenciális Bianchi-azonosság. Riemann-sokaságok, a Riemann-geometria alaplemmája. Riemann-geodetikusok. A Riemann-féle görbületi tenzor, metszetgörbület, Schur tétele, térformák. Ricci-tenzor, Ricci-görbület, skalárgörbület. Hiperfelületek az  $(n+1)$  dimenziós valós térben, a Gauss- és a Codazzi-Mainardi-egyenletek. A Gauss-görbület.

Irodalom:

- Szilasi József: Bevezetés a differenciálgeometriába, Kossuth Egyetemi Kiadó, 1998.  
Szenthe János: Bevezetés a sima sokaságok elméletébe, ELTE Eötvös Kiadó, 2002.  
Szókefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, 1979.  
John M. Lee: Introduction to Smooth Manifolds (2nd edition); Springer, 2013.

**TTMME0303, TTMMG0303**

**Véges geometriák és kódelmélet**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Szilasi Zoltán**

**Előfeltétele: nincs**

Véges illeszkedési struktúrák: projektív és affin síkok, Galois-geometriák. Véges projektív síkok kombinatorikai tulajdonságai. Ívek, oválisok. Véges projektív síkok és algebrai struktúrák. Test feletti véges affin és projektív síkok konstrukciója. Példák véges projektív síkokon kombinatorikusan definiált pontthalmazokra. További illeszkedési geometriák konstrukciója: blokkrendszerek, Steiner-rendszerek. Véges geometriákhoz kapcsolódó

kódelméleti konstrukciók.

Irodalom:

D. R. Hughes, F. C. Piper: Projective Planes, Springer, 1973.  
Kárteszi Ferenc: Bevezetés a véges geometriákba, Akadémiai Kiadó, 1973.  
Kiss György, Szőnyi Tamás: Véges geometriák, Polygon, 2001.  
S. E. Payne: Topics in Finite Geometry, 2007.  
Szilasi Zoltán: Bevezetés a véges geometriába, 2013.

**TTMME0104, TTMMG0104**

**Gráfelmélet és alkalmazásai**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Nyul Gábor**

**Előfeltétele: nincs**

Gráfok többszörös összefüggősége: Menger tételei, éldiszjunkt feszítőfák. Gráfok színezései: kromatikus szám, mohó csúcsszínezés, Brooks-tétel, Mycielski-konstrukció, perfekt gráfok, kromatikus polinom, kromatikus index, Vizing-tétel. Függelenség és lefogás: Gallai tételei, König-tétel, Hall-tétel, teljes párosítások páros és tetszőleges gráfokban, javító utak módszere. Extremális gráfelmélet: Mantel-tétel, Turán-tétel. Barátságtétel, erősen reguláris gráfok. Sikbarajzolható gráfok, metszési szám. Irányított utak és körök irányított gráfokban, turnamentek.

Irodalom:

Hajnal Péter: Gráfelmélet, Polygon, 2003.  
Katona Gyula Y., Recski András, Szabó Csaba: A számítástudomány alapjai, Typotex, 2006.  
J. A. Bondy, U. S. R. Murty: Graph Theory, Springer, 2008.  
Hajnal Péter: Elemi kombinatorikai feladatok, Polygon, 2005.  
Friedl Katalin, Recski András, Simonyi Gábor: Gráfelméleti feladatok, Typotex, 2006.

**TTMME0402, TTMMG0402**

**Sztochasztikus folyamatok**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Szokol Patricia**

**Előfeltétele: nincs**

Feltételes várható érték általános fogalma, diszkrét és folytonos idejű Markov-láncok, diszkrét idejű martingálok, Wiener-folyamat, Wiener-folyamat szerinti sztochasztikus integrál (Itô-integrál), Itô-formula, sztochasztikus differenciálegyenletek, diffúziós folyamatok.

Irodalom:

Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.  
Csörgő Sándor: Fejezetek a valószínűségelméletből, Szegedi Egyetemi Kiadó, Polygon, 2010.  
I. Karatzas, S. E. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, 1991.  
N. Shiryaev: Probability, 2nd edition, Springer-Verlag, 1995.  
S. M. Ross: Introduction to Probability Models, 10th edition, Academic Press, 2009.

**Speciális modulok**

***Algebra modul***

**TTMME0105, TTMMG0105**

**Véges testek és alkalmazásai**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Bérczes Attila**

**Előfeltétele: nincs**

Véges testek struktúrája és automorfizmusai. Véges test feletti polinomok: körosztási és irreducibilis polinomok. Wedderburn tétele. Polinomok rendje, primitív polinomok. Polinomok felbontása véges testek felett. Berlekamp-algoritmus, Zassenhaus javítása. Véletlen algoritmusok polinom gyökeinek meghatározására véges testekben. A véges testek alkalmazásai a hibajavító kódok elméletében, a kombinatorikában és a kriptográfiában.

Irodalom:

R. Lidl, H. Niederreiter: Introduction to Finite Fields and Their Applications, Cambridge University Press, 1994.  
Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: Absztrakt algebrai feladatok, Polygon, 2005.

Kiss Emil: Bevezetés az algebra, Elméleti matematika sorozat. Budapest, Typotex, 2007.

#### **TTMME0111, TTMMG0111**

##### **Algebrai kódelmélet**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Pink István**

**Előfeltétele: TTMME0105**

Hibajavító kódolás alapjai, lineáris kódok, blokk kódok, ciklikus kódok, példák: Hamming-kód, Hadamard-kód, Golay-kód, BCH-kód, Reed-Solomon-kód. Kódolás és dekódolás, aszimptotikák. Becslések kód méretére. Entrópia, Shannon-kapacitás. Önduális kód, Reed-Muller-kód, Goppa-kód, tökéletes kódok. Konvolúciós kódok, kvadratikus maradék kódok. Gyakorlati alkalmazások, a CD kódolása és dekódolása.

##### Irodalom:

Györfi L., Györi S., Vajda I.: Információ- és kódelmélet, Typotex, 2010.

G. Birkhoff, T. C. Barte: Modern algebra a számítógéptudományban, Műszaki, 1974.

J. H. van Lindt: Introduction to Coding Theory, Springer, GTM, 1982.

E. R. Berlekamp: Algebraic Coding Theory, Aegean Park Press, 1984.

#### **TTMME0113**

##### **Kommutatív algebra**

**2+1 óra, 4+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Horváth Gábor**

**Előfeltétele: TTMME0103**

Kommutatív gyűrűk ideálmélete, prim- és primér ideál, nilradikál. Lasker-Noether-tétel, Krull-metszettétel. Hilbert-féle Nullstellensatz, Gröbner-bázisok. Lokális gyűrűk, lokalizáció, kommutatív, egységelemes Artin-gyűrűk struktúratétele. Krull-dimenzió, Artin-gyűrűk karakterizálása a Noether-gyűrűk között. Egységelemes Artin-gyűrű Noether-Jacobson-Herstein-tétel.

##### Irodalom:

M. F. Atiyah, I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1969.

#### **TTMME0114**

##### **Véges csoportok és reprezentációik**

**2+1 óra, 4+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Pongrácz András**

**Előfeltétele: TTMME0103**

Transzfer, alkalmazások. Schur tétele. Normál komplementum tételek, Frobenius-tétel. Schur-Zassenhaus-tétel, Hall tételei. Iwasawa-lemma. Példák: unitér csoportok, szimplektikus csoportok. Golay-kódok, Steiner-rendszerek, Mathieu-csoportok. Reprezentációelmélet, karaktertábla. Indukált reprezentációk, Frobenius-reciprocitás, Frobenius-tétel. Normálosztóindukált karakterei, Clifford tétele, Galaghar tétele. Általánosított karakterek, Brauer tétele, karaktertáblában sok a 0. Példák:  $S_n$  irreducibilis karakterei, Young-sémák. Involúció centralizátorok, Klein-eset, diéder eset.

##### Irodalom:

Derek J. S. Robinson: A Course in the Theory of Groups, Springer, New York, 1982.

I. Martin Isaacs: Character Theory of Finite Groups, Academic Press, New York, 1976.

#### **TTMME0115**

##### **Modellelmélet**

**2+1 óra, 4+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Pongrácz András**

**Előfeltétele: TTMME0103**

Halmazelméleti alapok. Rendezések és jólrendezések. Számosságok és rendszámok. Kiválasztási axióma, jólrendezési tétel, Zorn-lemma. A Zorn-lemma alkalmazásai. Artin tétele testek rendezhetőségéről. Ultrafilterek létezése. Fréchet-filterek. Elsőrendű struktúrák és formulák. Formulaindukció. Szabad változók, kiértékelések. Részstruktúrák. Homomorfizmusok, endomorfizmusok, automorfizmusok. Direkt szorzat. Elméletek és modellek. Példák. Ultraszorzat. Los-lemma. Az elsőrendű logika kompaktsági tétele. Levezetés, levezethetőség. A szintaktikai és a szemantikai következmény fogalma, ezek ekvivalenciája az elsőrendű logikában (Gödel teljességi tétele). Reduktum, kiterjesztés, elemi rész. Tarski-Vaught-kritérium. Skolem-függvények, leszálló Löwenheim-Skolem-tétel. Felszálló Löwenheim-Skolem-tétel. A Skolem-paradoxon és feloldása. Láncok és elemi láncok. Robinson-diagramok. Axiomatizálhatóság általában és különböző

megkötésekkel: véges axiomatizálhatóság, univerzális, induktív elméletekkel való axiomatizálhatóság. Robinson konzisztenciatétele, Craig interpolációs tétele. Típusok, Stone-terek. Típuselkerülési tételek, omega-kategorikus struktúrák, Ryll-Nardzewski tétele. Kvantoreliminálhatóság, homogén struktúrák. Végpontnélküli sűrű rendezés. Véletlen gráf.

Irodalom:

Hajnal András, Hamburger Péter: Halmazelmélet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

Wilfried Hodges: Model Theory, Cambridge University Press, 1993.

**TTMMG0116**

**Fejezetek az algebrából**

**0+2 óra, 0+2 kredit, Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Pongrácz András**

**Előfeltétele: nincs**

Cikkek és feladatok formájában különböző algebrai területek önálló feldolgozása.

Irodalom:

D. J. S. Robinson: A Course in the Theory of Groups, Springer, New York, 1982.

J. D. Dixon, B. Mortimer: Permutation Groups, Springer, New York, 1996.

M. F. Atiyah, I. G. MacDonald: Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1969.

Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: Absztrakt algebrai feladatok, Polygon, 2005.

Babai László, Frankl Péter: Linear Algebra Methods in Combinatorics with Applications to Geometry and Computer Science, 1992.

***Számelmélet modul***

**TTMME0117**

**Algebrai geometria**

**2+1 óra, 4+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Tengely Szabolcs**

**Előfeltétele: nincs**

Affin algebrai geometria, affin algebrai halmazok, Hilbert-féle Nullstellensatz, polinom leképezések, az elimináció geometriája, projektív algebrai geometria, projektív algebrai halmazok, Hilbert-polinomok.

Irodalom:

David A. Cox, John Little, Donal O'Shea: Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra.

**TTMME0118**

**Algoritmusok diofantikus egyenletek megoldására**

**2+1 óra, 4+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Gaál István**

**Előfeltétele: TTMME0102**

Lánc törtek és alkalmazásaik Pell-egyenletek megoldására, diofantikus approximációs módszerekben. Thue-egyenletek, becslések a megoldásra, kis megoldások kiszámítása lánc törtekkel. Baker-korlát redukciója a Davenport-lemma felhasználásával, LLL-redukcióval. Thue-egyenletek felhasználása harmad- és negyedfokú számtestek indexforma egyenleteinek megoldására.

Irodalom:

I. Gaál: Diophantine Equations and Power Integral Bases, Boston, Birkhäuser, 2002.

N. P. Smart: The Algorithmic Resolution of Diophantine Equations, London Math. Soc., Cambridge University Press, 1998.

M. Pohst and H. Zassenhaus: Algorithmic Algebraic Number Theory, Cambridge University Press, 1989.

**TTMME0119**

**Diofantikus egyenletek**

**2+1 óra, 4+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Pintér Ákos**

**Előfeltétele: nincs**

Kongruenciák valamint elemi faktorizációs tulajdonságok használata diofantikus egyenletek megoldására. Négyzetszámok számtani sorozatokban. Lucas-sorozatok alkalmazása. Az  $y^2=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ ,  $ax^3+by^3+cz^3=0$  illetve az  $x^3+y^3+z^3-xyz=0$  diofantikus egyenletekkel kapcsolatos eredmények. Diofantikus

egyenletek racionális megoldásai. Algebrai számelméleti eszközök alkalmazása diofantikus egyenletek megoldására.

Irodalom:

L. J. Mordell: Diophantine Equations, Elsevier, 1969.

#### **TTMME0120, TTMMG0120**

**Effektív módszerek a diofantikus egyenletek elméletében**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Pink István**

**Előfeltétele: TTMME0102**

A Baker-módszer alkalmazása diofantikus egyenletek széles osztályainak explicit megoldására. Bizonyos egész értékű számsorozatokban előforduló primitív prímosztók alkalmazása diofantikus egyenletek explicit megoldására. Irracionális számok effektív irracionálitási mértékének alkalmazása bizonyos diofantikus egyenletek explicit megoldására.

Irodalom:

J.-H. Evertse, K. Györy: Unit Equations in Diophantine Number Theory, Cambridge University Press, 2015.

N. P. Smart: The Algorithmic Resolution of Diophantine Equations, London Math. Soc., Cambridge University Press, 1998.

I. Gaál: Diophantine Equations and Power Integral Bases, Boston, Birkäuser, 2002.

#### **TTMME0121**

**Elliptikus görbék**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Tengely Szabolcs**

**Előfeltétele: nincs**

Racionális görbék pontjainak csoportjai. Elliptikus görbék véges testek felett, Hasse tétele. Elliptikus görbék a racionális számtest felett. Torziós pontok, Lutz-Nagell-tétel. A Mordell-Weil-csoport. A Mordell-Weil-rang korlátozása, a Selmer-csoport. Elliptikus görbék a komplex számok felett.

Irodalom:

L. C. Washington: Elliptic Curves Number Theory and Cryptography, Chapman & Hall/CRC, 2003.

#### **TTMME0122**

**Prímszámelmélet**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Hajdu Lajos**

**Előfeltétele: nincs**

Primitív gyök létezése modulo  $m$ . Primitív gyökök száma modulo  $m$ , index kalkulus és alkalmazásai. A  $\pi(x)$  függvényhez kötődő nevezetes függvények: a Mangoldt-függvény, Csebisev függvényei és alapvető tulajdonságaik. A Möbius-függvény és a Mangoldt-függvény aszimptotikus viselkedése és átlagfüggvénye. A prímszámtétel ekvivalens alakjai. A prímszámtétel egy közelítésének elemi bizonyítása. A tétel következményei. Aszimptotikus formula a prímek reciprokösszegének részösszegeire. Aszimptotikus formula a Möbius függvény összegfüggvényének részösszegeire. A formula következményei. A prímszámtétel elemi bizonyításának vázlata. A prímszámtétel alkalmazásai. Prímszámok közötti hézagokra vonatkozó tételek és a Bertrand-posztulátum bizonyítása. A prímszámtétel számtani sorozatokban. Alkalmazások, következmények. A Riemann-zeta függvény. Történeti áttekintés. Konvergencia. A Riemann-zeta függvény szorzat alakja. Kapcsolat a Möbius-függvénnyel. Nevezetes értékek. A Riemann-sejtés.

Irodalom:

Freud Róbert, Gyarmati Edit: Számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004.

Erdős Pál, Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből, Polygon, Szeged, 1996.

Gareth A. Jones, J. Mary Jones: Elementary Number Theory, Springer, London, 2005.

Sárközy András, Surányi János: Számelmélet – feladatgyűjtemény, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

Tom Apostol: Introduction to Analytic Number Theory, Springer, 1976.

## ***Diszkrét matematika modul***

**TTMME0108, TTMMG0108**

**Kombinatorika és alkalmazásai**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Nyul Gábor**

**Előfeltétele: nincs**

Formális hatványsorok, sorozatok generátorfüggvénye és exponenciális generátorfüggvénye. Permutációkkal és osztályozásokkal kapcsolatos leszámplálási problémák (Stirling-számok, Bell-számok és változataik, Euler-számok, szubfaktoriálisok). Catalan-számok. Halmazrendszerekkel kapcsolatos extrémális kérdések, Sperner-rendszerek, metsző rendszerek. Blokkrendszerek, Steiner-rendszerek, szimmetrikus és feloldható blokkrendszerek. Véges projektív és véges affín síkok, ortogonális latin négyzetek, Hadamard-mátrixok.

### Irodalom:

Hajnal Péter: Összeszámplálási problémák, Polygon, 1997.

Hajnal Péter: Halmazrendszerek, Polygon, 2002.

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik: Konkrét matematika, Műszaki Könyvkiadó, 1998.

Martin Aigner: A Course in Enumeration, Springer-Verlag, 2007.

Stasys Jukna: Extremal Combinatorics, Springer-Verlag, 2011.

Douglas R. Stinson: Combinatorial Designs, Springer-Verlag, 2004.

**TTMME0107, TTMMG0107**

**Diszkrét optimalizálás**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Nyul Gábor**

**Előfeltétele: nincs**

Diszkrét optimalizálási problémák elméleti háttere. Teljesen unimoduláris mátrixok, egészértékű lineáris programozás, Hoffman-Kruskal-tétel. Hozzárendelési probléma, kvadratikus hozzárendelési probléma, halmazlefedési probléma, kínai postás probléma, utazó ügynök probléma, Steiner-fa probléma, ládapakolási probléma. Maximális folyam–minimális vágás probléma, Ford-Fulkerson-tétel, Edmonds-Karp-tétel. Mohó algoritmus leszálló halmazrendszerekre, matroidok.

### Irodalom:

Imreh Balázs, Imreh Csanád: Kombinatorikus optimalizálás, Novadat, 2005.

Bernhard Korte, Jens Vygen: Combinatorial Optimization, Springer-Verlag, 2006.

Dieter Jungnickel: Graphs, Networks and Algorithms, Springer-Verlag, 2008.

Vijay V. Vazirani: Approximation Algorithms, Springer-Verlag, 2001.

**TTMME0106, TTMMG0106**

**Matematikai algoritmusok**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Bérczes Attila**

**Előfeltétele: TTMME0104**

Gráfok ábrázolási módjai, szélességi és mélységi keresés, minimális feszítőfák keresése: Kruskal-, Prim- és Boruvka-algoritmus. A Bellman-Ford-algoritmus. A Dijkstra-algoritmus. A legrövidebb utak szerkezete: a Floyd-Warshall-algoritmus. Irányított gráfok tranzitív lezártja, Johnson ritka gráfokon hatékony algoritmus. Polinomok megadása: a diszkrét Fourier-transzformált és a gyors Fourier-transzformáció algoritmus. Számelméleti algoritmusok: Euklideszi algoritmus, műveletek maradékosztályokkal, kínai maradéktétel. Gyorshatványozás. Prímtesztelés és prímfaktorizáció. Valószínűségi prímteszt, Agrawal–Kayal–Saxena-prímteszt. Pollard-féle rho-faktorizáció.

### Irodalom:

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein: Új algoritmusok, Scolar Kiadó, Budapest, 2003.

Gács P., Lovász L.: Algoritmusok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

Rónyai L., Iványos G., Szabó R.: Algoritmusok, Typotex, Budapest, 1998.

Herbert S. Wilf: Algorithms and Complexity, electronic edition, 1994.

## *Analízis modul*

### **TTMME0207, TTMMG0207**

#### **Közönséges differenciálegyenletek alkalmazásai**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Novák-Gselmann Eszter**

**Előfeltétele: nincs**

Autonóm differenciálegyenlet-rendszerek és fázisterek. Differenciálegyenletek stabilitása, Lyapunov tételei, a Lyapunov-féle direkt módszer. Peremérték-problémák és sajátérték-feladatok. Green-függvény. Egzisztencia és unicitási tételek. Maximum- és minimumelv. Nemlineáris peremérték-problémák. Sturm-Liouville sajátérték-feladatok. Forgásszimmetrikus elliptikus problémák. Diffeomorfizmusok és szimmetriák. Az egyparaméteres szimmetriacsoport alkalmazása egyenlet integrálására. Variációszámítás, az Euler–Lagrange-differenciálegyenletek, az Euler–Lagrange-differenciálegyenletek invarianciája, az Euler–Lagrange-differenciálegyenletek kanonikus alakja, az Euler–Lagrange-differenciálegyenletek első integráljai. A Noether-tétel. A legkisebb hatás elve.

#### Irodalom:

V. I. Arnol'd, Közönséges differenciálegyenletek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

V. I. Arnol'd, A mechanika matematikai módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.

V. I. Arnol'd, A differenciálegyenletek elméletének geometriai fejezetei, Műszaki Könyvkiadó, 1988

B. Dacorogna, Introduction to the Calculus of Variations, 2nd ed., London: Imperial College Press, 2008.

Ph. Frank, R. Mises, A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei I-II., Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.

A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, Theory of Extremal Problems, Studies in Mathematics and its Applications, 6. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.

W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen - Eine Einführung, 7. Auflage, Springer, 2000.

### **TTMME0209**

#### **Ortogonalis polinomok**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Boros Zoltán**

**Előfeltétele: nincs**

Hilbert-terek, az  $\ell^2$ -tér és az  $L^2$ -tér. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség. Ortonormált sorozatok Hilbert terekben. Fourier-sor, Bessel-egyenlőtlenség és a Parseval-képlet. Ortonormált sorozat zártsága és teljessége. A Fourier-transzformáció. A Lebesgue-lemma. A trigonometrikus rendszer. A Dirichlet-féle magfüggvény. Dini és Lipschitz tételei. Trigonometrikus Fourier-sorok Cesaro-értelemben vett pontonkénti konvergenciája. A Fejér-féle magfüggvény és Fejér tételei. Weierstrass approximációs tételei. Gram-determináns és a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárás. Adott súlyfüggvényre nézve ortogonalis polinomrendszerek létezése és teljessége. Klasszikus polinom-rendszerek. A Rodrigues-formula. Legjobb approximáció polinomokkal. Csebisev-polinomok. Ortogonalis sorok pontonkénti konvergenciája, a Rademacher–Mensov-tétel. Folytonossági modulus, Jackson tételei, Bohmann-Korovkin-tétel. Stone–Weierstrass-tétel, Müntz-tétel. Lagrange-féle interpoláció. Hermite-interpoláció. Spline-függvények.

#### Irodalom:

Szőkefalvi-Nagy B.: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, 1972.

I. P. Natanson: Konstruktív függvénytan, Tankönyvkiadó, 1952.

N. I. Ahijezzer: Előadások az approximáció elméletéről, Akadémiai Kiadó, 1951.

### **TTMME0210**

#### **Topologikus fixponttételek**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Bessenyei Mihály**

**Előfeltétele: nincs**

Szimplexek és baricentrikus koordináták. Sperner-számozás, Sperner-lemma. A KKM-lemma euklideszi terekben és topologikus vektorterekben. A Ky Fan-egyenlőtlenség. Szeminormált terek; Tyihonov fixponttétele. A Brouwer-féle fixponttétel és Schauder 1. fixponttétele. Kompakt leképezések; Schauder-approximáció és Schauder 2. fixponttétele. Alkalmazások a differenciálegyenletek elméletében, a játékelméletben és a funkcionálanalízisben: Peano tétele, Nash tétele és a Lomonoszov-tétel. Kuratowski-féle nemkompaktsági mérték és tulajdonságai. Kondenzáló leképezések; a Darbo–Sadovszkij-féle fixponttétel. Affin

leképezéscsaládok fixpontjai: a Markov–Kakutani–Tyihonov- és a Markov–Kakutani–Darbo–Szadovszkij-féle fixponttétel. A fokszámelmélet alaptétele és néhány alkalmazása: az algebra alaptétele, a Brouwer-féle fixponttétel és a Poincare-féle sündisznótétel. Halmazértékű leképezések; az equilibrium-tétel. Középérték tételek; a Kakutani–Fan–Glicksberg-tétel és a Bolzano–Miranda-tétel.

Irodalom:

E. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and its Applications I-IV, Springer, 1986.

A. Granas, J. Dugundji: Fixed Point Theory, Springer, 2003.

**TTMME0211**

**Iteratív fixponttételek**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Bessenyei Mihály**

**Előfeltétele: nincs**

A Banach-féle fixponttétel és paraméteres változata. A fixpontok stabilitása. Nemexpanzív leképezések. A Banach-féle fixponttétel általánosításai: a Matkowski-féle fixponttétel, a Ciric-féle fixponttétel és a Hegedüs–Szilágyi–Walter-féle fixponttétel. Fraktálmélet: a Hausdorff–Pompeiu-távolság és a Blaschke-tétel. Hutchinson tétele. Hausdorff-dimenzió és kiszámítása hasonlósági transzformációk esetén. A Banach-féle fixponttétel két megfordítása: a Bessaga-tétel és a Meyer-tétel. Fixponttételek monoton leképezésekre: Tarski fixponttétele; a Knaster–Tarski- és a Kantarovic–Tarski-fixponttétel. A Bishop–Phelps-rendezés. Caristi és Nadler tételei; az Ekeland-féle variációs elv.

Irodalom:

E. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and its Applications I-IV, Springer, 1986.

A. Granas, J. Dugundji: Fixed Point Theory, Springer, 2003.

**TTMME0212**

**Banach-algebrák**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Nagy Gergő**

**Előfeltétele: nincs**

Banach-algebrák. A spektrum, a spektrálsugár formula. A holomorf függvénykalkulus alaptulajdonságai és alkalmazásai. Gleason–Kahane–Zelazko-tétel. Kommutatív Banach-algebrák Gelfand-elmélete. Uniform algebrák, függvényalgebrák. Algebrák reprezentációi, Jacobson-radikál. Banach-algebrák reprezentációi.  $C^*$ -algebrák alaptulajdonságai. Folytonos függvénykalkulus és alkalmazásai. Spektrálmérték és spektrálintegrál. Spektráltétel és alkalmazásai. Pozitív lineáris funkcionálok.  $C^*$ -algebrák reprezentációinak jellemzése, felbontásuk. GNS-konstrukció. A Gelfand–Naimark-tétel.  $C^*$ -algebrák reprezentációinak tulajdonságai.

Irodalom:

J. B. Conway: A Course in Functional Analysis, Springer, 1990.

G. J. Murphy:  $C^*$ -Algebras and Operator Theory, Academic Press, 1990.

**TTMME0213**

**Fejezetek a funkcionálanalízisből**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Novál-Gselmann Eszter**

**Előfeltétele: nincs**

Lineáris operátorok, zárt operátorok, reguláris és szinguláris operátorok. Az adjungált operátor. Projekcióoperátorok és zárt alterek, alterek Hilbert-összege. A spektráltétel szorzatalakja  $B^*$ -részalgebrákra, a spektráltétel szorzatalakja korlátos operátorokra, a spektrálmérték, Neumann-tétel, a spektrálintegrál, a spektráltétel korlátos normális operátorokra, a spektráltétel szorzatalakja, a gyenge és az erős operátortopológia, a Neumann-féle második kommutáns tétel, a Kaplansky-féle sűrűségi-tétel. Kommutatív Neumann-algebrák. Projekciók geometriája, Neumann-algebrák osztályozása, I. típusú Neumann-algebrák. Faktorok. Nemkorlátos operátorok és kommutatív Neumann-algebrák.

Irodalom:

R. V. Kadison and J. R. Ringrose: Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. I., Academic Press, 1983.

R. V. Kadison and J. R. Ringrose: Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. II., Academic Press, 1986.

Molnár Lajos: Banach-algebrák,  $C^*$ -algebrák és Neumann-algebrák, Debreceni Egyetem, Matematikai és Informatikai Intézete, Debrecen, 2000.

Járai Antal: Spektrálmélet, Kossuth Lajos Tudományegyetem, Debrecen, 1992.

**TTMME0214****Függvényegyenletek****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Mészáros Fruzsina****Előfeltétele: nincs**

A Cauchy-féle alapegyenletek és további lineáris egyenletek. A Pexider-, Jensen-, Hosszú-, D'Alembert- és a normanégyzet-egyenlet. Derivációk és az információelmélet függvényegyenletei. Kiterjesztési és stabilitási tételek. Függvényösszetétel tartalmazó egyenletek. A függvényegyenletek regularitáselméletének alapjai.

**Irodalom:**

Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, Academic Press, New York and London, 1966.

Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations in Several Variables, Cambridge University Press, 1989.

Járai, A.: Regularity Properties of Functional Equations in Several Variables, Springer-Verlag, 2005.

Kuczma, M.: An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa-Kraków-Katowice, 1985.

Lajkó K.: Függvényegyenletek feladatokban, jegyzet, Debreceni Egyetem, 2005.

**TTMME0215****Függvényegyenlőtlenségek****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Boros Zoltán****Előfeltétele: nincs**

Konvex függvények és általánosításai, a Jensen-egyenlőtlenség. Schur-konvexitás és majorizáció. A középértékek elmélete. Az összehasonlítás, egyenlőség és homogenitás problémája, valamint Hölder- és Minkowski-típusú egyenlőtlenségek a kváziaritmetikai és további középértékosztályokban.

**Irodalom:**

G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Gy. Pólya: Inequalities, Cambridge University Press, 1952.

M. Kuczma: An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, Państwowe Wydawnictwo Naukowe-Universitet Śląski, 1985.

A. W. Roberts, D. E. Varberg: Convex Functions, Academic Press, 1973.

**TTMME0216****Disztribúciók és integráltranszformációk****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Fazekas Borbála****Előfeltétele: nincs**

A tesztfüggvények és a disztribúciók terei. Műveletek disztribúciókkal. Disztribúciók deriválása, integrálása, direkt szorzat, konvolúció. Temperált disztribúciók. Fourier-transzformáció. Paley—Wiener-tétel. Allandó együtthatós parciális differenciálegyenletek alapgondolása. Szoboljev-terek. Beágyazási és kiterjesztési tételek. Allandó együtthatós hiperbolikus és parabolikus egyenletekre vonatkozó Cauchy-feladat általánosított és klasszikus megoldása. Elliptikus egyenletekre vonatkozó általánosított és klasszikus peremérték feladatok. Vegyes feladatok általánosított és klasszikus megoldása. Laplace-transzformáció és alkalmazásai.

**Irodalom:**

Davies, B.: Integráltranszformációk és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.

Donoghue, W. F.: Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York, London, 1969.

Simon, L., Baderko, E. A.: Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.

Schücker, T.: Distributions, Fourier Transforms and Some of Their Applications to Physics, World Scientific Publishing, Singapore, London, 1991.

Walter, W.: Einführung in die Theorie der Distributionen.

**TTMME0217****Absztrakt harmonikus analízis****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Gát György****Előfeltétele: nincs**

Topologikus csoportok alapjai, kompakt és lokálisan kompakt Abel-csoportok, Haar-mérték lokálisan kompakt topologikus csoportokon, moduláris függvény, unimoduláris csoportok, konvolúció, adjungálás és norma a

kompakt tartójú függvények terén, kapcsolat a mértékalgebra és a csoport tulajdonságai között, topologikus csoport folytonos unitér ábrázolása, a harmonikus analízis alaptétele, ortogonalitási relációk, Peter–Weyl-tétel, kommutatív csoport duális csoportja, Fourier-transzformáció, Pontrjagin-féle dualitási tétel.

Irodalom:

L. H. Loomis: An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Van Nostrand, 1953.

E. Hewitt, K. A. Ross: Abstract Harmonic Analysis, Springer-Verlag, 1979.

L. Sz. Pontrjagin: Topological Groups, Oxford University Press, 1946.

**TTMME0218**

**Nemsima analízis**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Páles Zsolt**

**Előfeltétele: nincs**

A normált terekbeli differenciálszámítás alapelemei. Fréchet-, Hadamard- és Gateaux-derivált és ezek kalkulusa. Középtérték egyenlőtlenség. Erős és folytonos Fréchet-, Hadamard- és Gateaux-differenciálhatóság kapcsolata. Inverzfüggvény tétel Banach-terek között ható leképezésekre. Fermat- és Lagrange-elv. Reguláris konvex függvények iránymenti deriváltja, szubgradiense és ezek kalkulusa. Lokálisan Lipschitz függvények Clarke-féle iránymenti deriváltja, szubgradiense és ezek kapcsolata, tulajdonságai és kalkulusa. A maximum-függvény és a halmazoktól vett távolságfüggvény Clarke-féle iránymenti deriváltja és szubgradiense. Halmazok Bouligand-féle és Clarke-féle érintőkúpja. A lokálisan Lipschitz függvényekre vonatkozó Rademacher-tétel. A Clarke-féle szubgradiens és a Clarke-féle általánosított derivált előállítására a Rademacher-tétel segítségével. A Clarke-féle inverzfüggvény tétel és a feltételes szélsőértékproblémákra vonatkozó multiplikátor tétel.

Irodalom:

Clarke, F. H.: Optimization and Nonsmooth Analysis. Second edition. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990.

Ferrera, J.: An Introduction to Nonsmooth Analysis. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2014.

Schiretzek, W.: Nonsmooth Analysis. Universitext, Springer Verlag, Berlin, 2007.

**TTMME0219**

**Approximációelmélet**

**2+1 óra, 4+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Gát György**

**Előfeltétele: nincs**

Approximáció Banach- és Hilbert-terekben, a legjobb közelítés, ortogonális rendszerek, Fourier-sorok, egyenletes approximáció, Jackson- és Bernstein-tételek, Csebisev-polinomok, Remez-algoritmusok, pozitív operátorok, Bohman–Korovkin-tétel, Bernstein-operátorok, Bezier-görbék, racionális, spline és Padé-approximáció, interpoláció trigonometrikus és algebrai polinomokkal, Lagrange-, Hermite-, Hermite-Fejér-interpoláció, bázisok Banach-terekben, biortogonális sorfejtés részletösszeg operátorai, frame Hilbert-térben, egzakt framek.

Irodalom:

N. I. Ahijezzer: Előadások az approximáció elméletéről, Akadémiai Kiadó, 1951.

I. P. Natanzon: Konstruktív függvénytan, Tankönyvkiadó, 1952.

F. Schipp: Approximációelmélet, ELTE, Budapest, 2006.

E. W. Cheney: Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill, New York, 1966.

R. A. DeVore: The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, Lecture Notes in Mathematics, 293, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

**TTMME0224, TTMMG0224**

**Fourier-sorok**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Gát György**

**Előfeltétele: nincs**

Marcinkiewicz interpoláció tételei, klasszikus és komplex trigonometrikus rendszer, Weierstrass tételei, trigonometrikus polinomok sűrűsége, a Riemann-Lebesgue-lemma, Dirichlet-féle magfüggvények, Fejér-féle magfüggvények, Fejér közepek normakonvergenciája, a Calderon-Zygmund-dekompozíció, Hilbert-operátor, Fejér-Lebesgue-tétel, a Dini- és a Lipschitz-féle konvergencia kritérium, Fourier részletösszeg operátorok normakonvergenciája, Walsh-rendszerre vonatkozó Fourier-sorok.

Irodalom:

Pál L. Gy.: Ortogonális függvénysorok, Tankönyvkiadó, 1978.

Szőkefalvi-Nagy B.: Valós függvények és függvénysorok, Tankönyvkiadó, 1975.  
N. K. Bary: A Treatise on Trigonometric Series, Elsevier, 2014.  
A. Zygmund, Trigonometric Series Vol I., Cambridge University Press, 2002.

#### **TTMME0220**

##### **Többváltozós Fourier-sorok**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Gát György**

**Előfeltétele: nincs**

Az egyváltozós Fourier-elmélet alapvető ismeretei, többdimenziós valós és komplex trigonometrikus rendszer, Fourier-együtthatók, téglány és szférikus Fourier-sor részletösszegek, norma és majdnem mindenütti konvergencia, többváltozós Hardy-Littlewood-maximálfüggvény, Calderon-Zygmund-dekompozíció, többváltozós Fejér-közepes megszorított és Pringsheim-féle értelemben vett majdnem mindenütti konvergenciája, többváltozós Walsh rendszerre vonatkozó Fourier-sorok.

##### Irodalom:

N. K. Bary: A Treatise on Trigonometric Series, Elsevier, 2014.  
A. Zygmund: Trigonometric Series, Vols I & II, Cambridge University Press, 2002.

#### **TTMME0221**

##### **Differenciászámítás**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Novák-Gselmann Eszter**

**Előfeltétele: nincs**

Osztott differenciák, Diszkrét kalkulus, Cesáro–Stolz-típusú tételek, a Newton- és a Lagrange-formula, Csebisev-polinomok és legfontosabb tulajdonságai, a Newton-formula ekvidisztáns alappontok esetén, az általánosított hatvány fogalma és tulajdonságai, a Stone-tétel, a Weierstrass-tétel, Bernstein-polinomok és a Bernstein-tétel, Függvényközelítés, a Lagrange-módszer konvergenciája, Bernstein-Faber-tétel, Faber-tétel, Marcinkiewicz-tétel és Bernstein példája, Függvények szummálása, az elemi összegzés esete, Newton–Leibniz-formula véges differenciákra, Abel-féle átrendezési tétel, Az elsőrendű inhomogén egyenlet megoldása polinom jobboldal esetén, Bernoulli-számok és polinomok, Faulhaber-formula, von Staudt–Clausen-tétel, Euler képlete, a Stirling-formula és a Wallis-képlet, Differenciaegyenletek, differenciaegyenletekre vezető problémák, az elsőrendű lineáris homogén és inhomogén egyenlet, A lineáris differenciaegyenletek általános elmélete, a lineáris differenciaegyenletek általános alakja, az egyenlet megoldásaira vonatkozó tételek, Függvények lineáris függősége és függetlensége, az inhomogén lineáris differenciaegyenlet, a konstansvariálás módszere, Konstans együtthatós lineáris differenciaegyenletek, a homogén egyenlet, a differenciaegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet, a homogén lineáris egyenlet általános megoldása, az inhomogén lineáris egyenlet általános megoldása, Poincaré és Perron tételei, Néhány további differenciaegyenlet-típus (Clairaut-, Euler-, Riccati- és Verhulst-differenciaegyenlet), A gamma függvény és legfontosabb tulajdonságai, szerepe a differenciászámításban, Hölder tétele, Bohr-Mollerup-tétel.

##### Irodalom:

A. O. Gel'fond: Differenciászámítás, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.  
C. Jordan: Calculus of Finite Differences, Hungarian Agent Eggenberger Book-Shop, Budapest, 1939.  
I. P. Natanson: Konstruktív függvénytan, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.  
G. Stoyan: Numerikus matematika: mérnököknek és programozóknak, Typotex, Budapest, 2007.  
E. Artin, The Gamma Function, Athena Series: Selected Topics in Mathematics, Holt, Rinehart and Winston, New York-Toronto-London, 1964.

### ***Geometria modul***

#### **TTMME0304**

##### **Geometriai szerkesztések elmélete**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Szilasi Zoltán**

**Előfeltétele: nincs**

Az euklideszi szerkesztés fogalma, a szerkeszthetőség algebrai kritériuma. Egész együtthatós polinomok gyökeinek szerkeszthetősége. Klasszikus szerkesztési feladatok. Szerkesztések csak körzővel, csak vonalzóval, Steiner szerkesztések. Szerkesztések nemeuklideszi eszközökkel.

##### Irodalom:

Czédli Gábor, Szendrei Ágnes: Geometriai szerkeszthetőség, Polygon, 1997.  
George E. Martin: Geometric Constructions, Springer, 1996.  
Szókefalvi Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete, Akadémiai kiadó, 1968.

### **TTMME0305, TTMMG0305**

#### **Geometriai transzformáció csoportok**

**2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy**

**Tárgyfelelős: Dr. Figula Ágota**

**Előfeltétele: nincs**

Transzformációcsoportok. Csoporthatások sokaságokon. A hatások infinitézimális vizsgálata. Tranzitív csoportthatás. Homogén terek. Effektív, primitív és imprimitív csoportthatás. Lokális és globális tranzitív csoportthatások osztályozása alacsony dimenzióban. Néhány globális csoportthatás a 2 dimenziós gömbfelületen, hengerfelületen, Möbiusz-szalagon, Klein-palackon és tóruszon. Nilpotens és feloldható sokaságok. Kompakt Lie-csoportok hatásai.

#### Irodalom:

V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, E. B. Vinberg: Foundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups, Springer, 1997.

J. Hilgert, K. H. Neeb: Structure and Geometry of Lie Groups, Springer, 2012.

L. Eugene: Notes on Lie Groups, 2012.

A. L. Onishchik, R. Sulanke: Projective and Cayley-Klein Geometries, Springer, 2006.

N. H. Ibragimov: Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, D. Reidel Publishing Company, 1985.

Szenthe János: Bevezetés a sima sokaságok elméletébe, Eötvös Kiadó, 2002.

F. W. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, 1983.

### **TTMME0306**

#### **Riemann-geometria**

**2+1 óra, 4+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Tran Quoc Binh**

**Előfeltétele: TTMME0302**

Riemann-metrikák, lineáris konnexió és párhuzamosság. A Levi-Civita-konnexió. Geodetikusok, exponenciális leképezés, a geodetikusok minimalizáló tulajdonsága, konvex környezetek. Görbületi tenzor és metszetgörbületek. Jacobi-mezők. Teljes sokaságok: a Hopf-Rinow-tétel és Hadamard tétele. Konstans görbületű terek. Az ívhossz első és második variációja. Jacobi-egyenlet, Jacobi-mezők és az exponenciális leképezés. Összehasonlító tételek.

#### Irodalom:

M. P. do Carmo: Riemannian Geometry, Birkhäuser, 1992.

I. Chavel: Riemannian Geometry: A Modern Introduction, Cambridge University Press, 2006.

S. S. Chern, W. H. Chen, K. S. Lam: Lectures on Differential Geometry, World Scientific 1999.

P. Petersen: Riemannian Geometry, Springer, 2016.

### **TTMME0307**

#### **Algebrai topológia**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Kozma László**

**Előfeltétele: nincs**

A fundamentális csoport és lefedő terek: Pályák, és homotópiák, a kör fundamentális csoportja. Csoportok szabad szorzata, a van Kampen tétel. Lefedő terek osztályozása. Szimpliciális és szinguláris homológiák. Homotóp invariancia. A Mayer-Vietoris sorozat. A homológiák és a fundamentális csoport kapcsolata. Kohomológiák: a kohomológia csoport, és gyűrű. A Kunnetth formula. Irányítás, és homológiák, a dualitási tétel. Homotópia csoportok, Whitehead tétele. A Hurwicz tétel.

#### Irodalom:

Hatcher, Allen. Algebraic Topology. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

**TTMME0308****Bevezetés a Finsler-geometriába****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Lovas Rezső****Előfeltétele: TTMME0302**

Finsler—Minkowski-vektorterek. Finsler-struktúrák sokaságokon, alapvető példák. A geodetikus spray és az indukált Ehresmann-konnexió. Kovariáns deriválás Finsler-sokaságokon, görbületek. Speciális Finsler-sokaságok.

**Irodalom:**

D. Bao, S.-S. Chern, Z. Shen: An Introduction to Riemann—Finsler Geometry, Springer Verlag, 2000.

Z. Shen: Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces, Kluwer Academic Publishers, 2001.

J. Szilasi, A Setting for Spray and Finsler Geometry, in: Handbook of Finsler Geometry Vol. 2, Kluwer Academic Publishers, 2003.

J. Szilasi, R. L. Lovas, D. Cs. Kertész, Connections, Sprays and Finsler Structures, World Scientific, 2014.

**TTMME0309****Variációszámítás****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Lovas Rezső****Előfeltétele: nincs**

A síkbeli nemparaméteres variációs feladat. A variációszámítás alaptétele. Az Euler—Lagrange-differenciálegyenlet. Legendre, Jacobi és Weierstrass szükséges feltételei. A mezőelmélet alapfogalmai. Mező létezése és a Jacobi-feltétel. Elégséges feltételek. A síkbeli paraméteres probléma. Szükséges és elégséges feltételek. A metrikus differenciálgeometria alapjai. Geodetikus mező létezése. Geodetikusok mint minimális görbék. Jacobi differenciálegyenlete. A konjugált pontok fogalma.

**Irodalom:**

Kósa András: Variációszámítás, Tankönyvkiadó, 1990.

M. A. Lavrentyev, L. A. Ljusztyernyik: Variációszámítás, Akadémiai Kiadó, 1953.

L. D. Elsgolc: Calculus of Variations, Dover Publications, 2007.

**TTMME0310****Vektoranalízis sokaságokon****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Vincze Csaba****Előfeltétele: nincs**

Rész sokaságok az  $n$  dimenziós euklideszi térben: görbék és felületek. Differenciálható sokaságok. Érintőtér és érintősokaság. Vektormezők és Lie-zárójel. Differenciálformák kalkulusa: Lie-deriválás és külső differenciálás. A Cartan-formula. Zárt és egzakt differenciálformák, a potenciálmélet alapjai. Poincaré tétele. Irányítható sokaságok, térfogati forma és divergencia. Reguláris tartományok, a peremes sokaság fogalma. Egységbontás. Térfogati formák integrálása, a Stokes-tétel. A Riemann-féle metrikus tenzor és a vektoranalízis klasszikus tételeinek leszármaztatása.

**Irodalom:**

M. P. do Carmo: Differential Forms and Applications, New York: Springer-Verlag, 1994.

K. Janich, Vector Analysis, New York: Springer, 2000.

Kurusa Árpád, Bevezetés a differenciálgeometriába, Polygon, 1999.

J. M. Lee, Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 218, 2012.

Szilasi József, Bevezetés a differenciálgeometriába, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1998.

Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, 1979.

F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, New York: Springer, 1983.

**TTMME0311****Differenciálrendszerek geometriai elmélete****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Muzsnay Zoltán****Előfeltétele: nincs**

Differenciálható sokaságok, vektornyalábok. Vektormezők. Külső formák, külső deriválás, Lie-derivált. Közönséges és parciális differenciálegyenletek és egyenletrendszerek geometriai interpretációja. Elsőrendű parciális differenciálegyenlet-rendszerek teljes integrálhatósága. Frobenius tétele. Jet nyalábok. Magasabb rendű túlhatározott lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszerek vizsgálata. Lineáris differenciáloperátorok. Szimbólum, kváziregularitás, Cartan-teszt. Differenciálegyenlet-rendszerek prolongálása. Formális integrálhatóság. Az integrálhatóság akadályai. Cauchy-Kovalevszkaja tétele. Cartan-Kahler-tétel. Alkalmazások.

**Irodalom:**

Bryant, Chern, Gardner, Goldschmidt, Griffiths: Exterior Differential Systems, Springer-Verlag, 1990.

M. Spivak: A comprehensive introduction to differential geometry, vol I, Publish or Perish, 1999.

J. Grifone, Z. Muzsnay: Variational Principles for Second-order Differential Equations, World Scientific, 2000.

**TTMME0312****Felületelmélet****2+1 óra, 4+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Tran Quoc Binh****Előfeltétele: nincs**

A Gauss-leképezés és a második alapforma. Integrálás a felületen, felszín-formula, divergencia-tétel. Brouwer fixponttétele. A felület belső geometriája: a Gauss-féle „theorema egregium”. A felület külső geometriája: pozitív görbületű felületek, Minkowski-féle formulák, Alexandrov tétele. Konstans görbületű felületek. Minimálfelületek, Weierstrass-formula. A Gauss-Bonnet-tétel geodetikusan háromszögekre. Kompakt zárt felületek Euler-karakterisztikája. A Gauss-Bonnet-tétel globális alakja.

**Irodalom:**

Szőkefalvi-Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: Differenciálgeometria, Műszaki Könyvkiadó, 1979.

Do Carmo: Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976.

S. Montiel, A. Ros, Curves and Surfaces, Graduate Studies in Mathematics, Volume 69, AMS 2005.

**TTMME0313, TTMMG0313****Differenciálgeometria számítógépes támogatással****2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy****Tárgyfelelős: Dr. Nagy Ábris****Előfeltétele: nincs**

Geometriai objektumok vizualizációja valamely komputeralgebrai program segítségével, valamint a geometria néhány területével kapcsolatos szimbolikus és numerikus számítások végzése. Az érintett geometriai fejezetek: geometriai transzformációk, Moebius transzformációk és hiperbolikus geometria. Parametrizált görbék, implicit görbék a síkon. Parametrizált és implicit felületek. Interpolációs görbék és felületek, szplájnok. Poliéderek. A variációszámítás elemei. Fraktálok.

**Irodalom:**

Rovenski, V. Modeling of Curves and Surfaces with Matlab(R). Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, 2010.

S. Gray, E. Salamon: Abben: Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Chapman &amp; Hall/CRC, 2006.

### **TTMME0314**

#### **Konvex geometria alkalmazásai**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Vincze Csaba**

**Előfeltétele: nincs**

A konvex geometria klasszikus tételeinek általánosításai: Tverberg tétele, Helly-típusú tételek csillagszerű halmazokra. Kirchberger-típusú tételek: szeparálás gömbbel. Műveletek halmazokkal, a Hausdorff-távolság. Kompakt halmazok metrikus tere és a teljességi tétel. A Blaschke-féle szelekciós tétel kompakt, konvex halmazokra. Extrémális halmazok. Radström beágyazási tétele. A Brunn-Minkowski-elmélet: a Brunn-Minkowski- és az izoperimetrikus egyenlőtlenség konvex halmazokra. Art gallery geometria: Krasnoselsky art gallery tétele, láthatósági problémák, Chvátal tétele. Az általánosított kúpszeletek és alkalmazásai: polyellipszisek az euklideszi síkon, az Erdős-Vincze-tétel. Ekvidisztáns halmazok. Geometriai tomográfia: irányra vonatkozó röntgenfüggvények, az egyértelműség és a rekonstrukció problémája.

#### Irodalom:

R. J. Gardner: Geometric Tomography, Cambridge University Press, 2006. (2nd ed.)

S. R. Lay: Convex Sets and Their Applications, John Wiley & Sons, Inc., 1982.

R. Schneider: Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, Cambridge University Press, 1993.

J. O' Rourke: Art Gallery Theorems and Algorithms, Oxford University Press, 1987

A. C. Thompson: Minkowski Geometry, Cambridge University Press, 1996.

F. A. Valentine: Convex Sets, New York, 1964.

Vincze Csaba: Convex Geometry, University of Debrecen, 2013, TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0025.

### **TTMME0315**

#### **Differenciáltopológia**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Kozma László**

**Előfeltétele: nincs**

Sima leképezések, és sokaságok. Érintőtér, részsokaság, és beágyazási tétel. Transzverzálitás, reguláris és kritikus pontok, Sard tétele. Brower-féle fixponttétel. Leképezések foka, vektormező, az Euler karakterisztika.

#### Irodalom:

V. Guillemin, A. Pollack: Differential Topology, Prestige Hall, 1974.

J. Milnor: Topology from the Differentiable Viewpoint, Princeton University Press, 1997.

### **TTMME0316**

#### **Robotmodellezés és kontrollélmélet**

**2+0 óra, 3+0 kredit, K**

**Tárgyfelelős: Dr. Figula Ágota**

**Előfeltétele: nincs**

A robotok geometriai jellemzése: alap, manipulátor (kéz), tagok, csuklók, elemi csukló tengelye, munkatér. Koordinátarendszer hozzárendelése a tagokhoz. Merev testek mozgásegyenletei és homogén transzformációk. Egyparaméteres mozgások leírása. A direkt és inverz kinematikai és sebességkinematikai feladat. A direkt kinematikai feladatok megoldása a Denavit-Hartenberg-féle paraméterek segítségével. Robotok kinematikai és dinamikai alapegyenletei. Ferdén szimmetrikus mátrixok és szögsebesség. A robot Jacobi-mátrixa. Szingularitások meghatározása. Robot manipulátorok pályatervezése. Robot manipulátorok dinamikája. Robot hajtások. Stabilitásvizsgálat, kontrollélmélet.

#### Irodalom:

M. W. Spong, S. Hutchinson, M. Vidyasagar: Robot Modeling and Control. John-Wiley & Sons, Inc., 2006.

Mester Gyula: Robotika, Szegedi Tudományegyetem, Typotex. 2011.

B. Siciliano, O. Khatib: Springer Handbook of Robotics, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. 2008.

Kovács Zoltán: Robotszerkezetek animációja (jegyzet)

**TTMME0317****Lie-csoportok és Lie-algebrák****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Figula Ágota****Előfeltétele: nincs**

Lie-csoportok és Lie-algebrák fogalma. Lineáris reprezentáció. Lie-csoportok és Lie-algebrájuk. Az exponenciális leképezés. Zárt részsokaságok. Lie-csoportok összefüggősége és egyszeresen összefüggősége. Lie-algebrák struktúra tételei. Gyök felbontások. Lie-algebrák reprezentáció elmélete. Lie-csoportok hatásai sima sokaságokon. Lie-csoportok struktúra elmélete. Lie-csoportok és Lie-algebrák osztályozása.

Irodalom:

J. Hilgert, K.H. Neeb: Structure and Geometry of Lie Groups, Springer, 2012.

Csikós Balázs: Lie-csoportok és Lie-algebrák, Egyetemi jegyzet, 2008.

V. V. Gorbatsevich, A. L. Onischchik, E. B. Vinberg: Foundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups, Springer, 1997.

L. Eugene: Notes on Lie Groups, jegyzet, 2012.

R. Gilmore: Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications, Krieger Publishing Company, 1994.

Szenthe János: Bevezetés a sima sokaságok elméletébe, Eötvös Kiadó, 2002.

F. W. Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, 1983.

***Operációkutatás modul*****TTMME0208, TTMMG0208****Játékelmélet****2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy****Tárgyfelelős: Dr. Boros Zoltán****Előfeltétele: nincs**

Nem-kooperatív játékok normál alakja. A Nash-féle egyensúlyi helyzet fogalma, létezése. A legjobbválasz-leképezés. A játékelméletben alkalmazott fixponttételek. Véges játékok elemzése, szigorúan dominált stratégiák, kétszemélyes véges játékok bimátrix reprezentációja. A játékelméleti megközelítés alkalmazása egyszerűbb piaci modellekre (duo-pólium, oligopólium). Véges játékok kevert bővítése. Kétszemélyes zéróösszegű játékok, mátrix-játékok. Játékok extenzív alakban. Kombinatorikus játékok, kupac-játékok, Grundy-számozás. Kooperatív játékok, a koalíció értéke. A Nash-féle alkumodell.

Irodalom:

J. H. Conway: On Numbers and Games, Academic Press, 1976.

Martin J. Osborne: An Introduction to Game Theory, Oxford University Press, 2003.

Szép J., Forgó F.: Bevezetés a játékelméletbe, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1974.

Szidarovszky F., Molnár S.: Játékelmélet műszaki alkalmazásokkal, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

**TTMME0205, TTMMG0205****Konvex optimalizálás****2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy****Tárgyfelelős: Dr. Bessenyei Mihály****Előfeltétele: nincs**

Burok operációk és reprezentációik. A Stone–Kakutani elválasztási tétel. Algebrai belső és algebrai lezárt. Komplementáris konvex halmazok algebrai lezártjainak metszete; konvex halmazok elválasztása lineáris függvényvel. A Dubovickij–Miljutyin-tétel és következményei. A Bernstein–Doetch-tétel lineáris függvényekre; az elválasztási tételek topologikus alakja. Konvex és szublineáris függvények; a maximum-tétel és következményei. Konvex függvények szubgradiense, iránymenti deriváltja. Kalkulus szabályok. A Bernstein–Doetch-tétel konvex függvényekre. Távolságfüggvény, érintőkúp, normálkúp. Konvex feltételes szélsőérték feladatok minimuma; primál és duál feltételek. A konvex Fermat-elv. Büntetőfüggvény. A Karush–Kuhn–Tucker-tétel és következménye. Slater-feltétel és Slater-tétel.

Irodalom:

T. R. Rockafellar: Convex Analysis, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.

J. M. Borwein and A. S. Lewis: Convex Analysis and Nonlinear Optimization, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2006.

**TTMME0222****Extrémum problémák****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Páles Zsolt****Előfeltétele: nincs**

A feltételes szélsőérték problémák Dubovickij–Miljutyin-féle elmélete. Halmazok megengedett és érintő irányai, függvények csökkenési irányai. A Dubovickij–Miljutyin-féle elválasztási tétel. A normált terekbeli differenciál-számítás alapelemei. Fréchet- és Gateaux-derivált és ezek kalkulusa. Ekeland-féle variációs elv. Ljuszternyik és Graves nemlineáris nyílt leképezés tétele. Sima sokaságok érintőterének leírása. A duális kúpok meghatározása. A Lagrange-féle multiplikátor tétel Banach-tereken. A variációszámítás alapfeladatai. Funkcionálok deriváltjának kiszámítása. Du Bois–Reymond-lemma. A szélsőérték Euler–Lagrange-féle és Euler–Poisson-féle szükséges feltételei.

**Irodalom:**

Durea, M.; Strugariu, R.: An Introduction to Nonlinear Optimization Theory. De Gruyter Open, Berlin, 2014.

Girsanov, L. V.: Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 67. Springer Verlag, Berlin-New York, 1972.

Ioffe, A. D.; Tihomirov, V. M.: Theory of Extremal Problems. Studies in Mathematics and its Applications, 6. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.

Jahn, J.: Introduction to the Theory of Nonlinear Optimization. Springer Verlag, Berlin, 2007.

**TTMME0223****Optimális folyamatok****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Páles Zsolt****Előfeltétele: nincs**

Normált terek és duális terek. Gateaux- és Fréchet-derivát fogalmi, tulajdonságai, kalkulusa. A feltétel nélküli és feltételes szélsőértékszámítás szükséges feltételei. Az irányításelmélet alapfeladatai izoperimetrikus és peremértékekre vonatkozó mellékfeltételekkel. Időoptimum probléma. Megengedett és optimális folyamatok. Gyengén lokális és erősen lokális optimális folyamat. Pontrjagin-féle lokális és globális maximum-elv. Dubovickij–Miljutyin-féle időtranszfórmáció. Kapcsolat a variációszámítás elsőrendű szükséges feltételeivel.

**Irodalom:**

Girsanov, L. V.: Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 67. Springer Verlag, Berlin-New York, 1972.

Ioffe, A. D.; Tihomirov, V. M.: Theory of Extremal Problems. Studies in Mathematics and its Applications, 6. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.

***Sztochasztika modul*****TTMME0403, TTMMG0403****Többváltozós statisztika****2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy****Tárgyfelelős: Dr. Baran Sándor****Előfeltétele: nincs**

Többdimenziós minta és jellemzői; főkomponens analízis; faktoranalízis; kanonikus korreláció analízis; osztályozási módszerek; klaszteranalízis; többdimenziós skálázás. Gépi tanulási eljárások a többváltozós statisztikában.

**Irodalom:**

Fazekas I. (szerk.): Bevezetés a matematikai statisztikába, Kossuth Egyetemi Kiadó, 2003.

A. J. Izenman: Modern Multivariate Statistical Techniques. Regression, Classification and Manifold Learning, Springer, 2008.

N. H. Timm: Applied Multivariate Analysis, Springer, 2002.

B. Everitt, T. Hothorn: An Introduction to Applied Multivariate Analysis with R, Springer, 2011.

K. V. Mardia, J. T. Kent, J. M. Bibby: Multivariate Analysis, Academic Press, 1982.

**TTMME0408****Idősorok elemzése****2+1 óra, 4+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Barczy Máttyás****Előfeltétele: TTMME0402**

Gyengén és erősen stacionárius idősorok, ARMA és ARIMA folyamatok, ezek előrejelzése az időtartományban és frekvencia tartományban. Box-Jenkins módszer. Kálmán-szűrés. Hosszú memóriájú és frakcionálisan integrált folyamatok.

**Irodalom:**

P. J. Brockwell, R. A. Davis: Time Series: Theory and Methods, 2nd edition. Springer, 2006.

W. W. S. Wei: Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods, 2nd edition. Pearson Education, 2006.

R. H. Shumway, D. S. Stoffer: Time Series Analysis and its Applications with R Examples, 3rd edition. Springer, 2011.

W. A. Fuller: Introduction to Statistical Time Series, 2nd edition. John Wiley & Sons Inc, 1996.

**TTMME0404, TTMMG0404****Opcióértékelés****2+2 óra, 3+2 kredit, K+Gy****Tárgyfelelős: Dr. Gáll József****Előfeltétele: nincs**

A hallgatók megismerik az alapvető derivatívákat és azok szerepét, a derivatív piacok működésének alapjait, a derivatívák árazásának alapelveit, az arbitrázsmentesség elvét és alkalmazását, továbbá néhány klasszikus modellt és azok illesztésével, alkalmazásával kapcsolatos problémákat és megoldási módszereket.

**Irodalom:**

Hull, J. C.: Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek, Panem-Prentice Hall, 1999.

Gáll J. és Pap Gy.: Bevezetés a pénzügyi matematikába, Polygon, Szeged, 2010.

Barczy M. és Gáll J.: Pénzügyi matematika példatár II, Polygon, Szeged, 2010.

**TTMME0407****Biztosítási matematika****2+0 óra, 3+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Aradi Bernadett****Előfeltétele: nincs**

Biztosítás fogalma, biztosítások csoportosítása, klasszikus nem-életbiztosítási modellek, összkármeghatározási módszerek, kapcsolódó illesztési, statisztikai kérdések. Díjkalkuláció. Élet- és viszontbiztosítási alapok, járadékszámítás, díjkalkuláció életbiztosítások esetén.

**Irodalom:**

Arató Miklós: Nem-életbiztosítási matematika, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2001.

Straub, Erwin: Non-life Insurance Mathematics, Springer-Verlag, 1980.

Szabó László Imre és Viharos László: Az életbiztosítás alapjai, Polygon jegyzet, 2001.

Banyár József: Életbiztosítás, Aula, 2003.

Mikosch, Thomas: Non-life Insurance Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2006.

**TTMME0411****Információelmélet****2+1 óra, 4+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Pintér Ákos****Előfeltétele: nincs**

Egyértelműen dekódolható és prefix kódok, entrópia, átlagos kódszóhossz, blokkonkénti kódolás. Optimális kódok, bináris Huffman- és Shannon-Fano-kód, feltételes entrópia. Információforrások és kódolásuk, univerzális forráskódolás, Lempel-Ziv algoritmusok. Forráskódolás előírt hibavalószínűséggel, információstabilis források, jelsebesség, forrásentrópia. Differenciális entrópia és tulajdonságai. Információs távolság. Kvantálás, optimális kvantáló, egyenletes és nem egyenletes kvantálók, Lloyd-Max algoritmus. Spektrálsűrűség, lineáris szűrés, mintavételezés, transzformációs kódolás, nevezetes transzformációk. Részszávos-, különbségi- és prediktív kódolás. DPCM, Jayant-kvantáló, delta-moduláció, prediktorok. Beszéd-, hang-, kép- és videotömörítés. Kölcsönös információ, betűnkénti hűségkritérium, R-D függvény. Forráskódolási tétel, megfordítása. Hibajavító kódolás alapjai, nevezetes korlátok. Lineáris kódok, generátor- és paritásellenőrző mátrix. Szindrómák. Bináris- és nem bináris Hamming-kód, általános lineáris kódok, ciklikus kódok, generátor- és paritásellenőrző polinomok. Bináris Golay-kód, Reed-Solomon- és Reed-Müller-kód. BCH-kód, kódfűzés, szorzat- és kaszkád kódok.

**Irodalom:**

Györfi László, Györi Sándor, Vajda István: Információ- és kódelmélet. Typotex, 2010.

Csiszár Imre, Fritz József: Információelmélet. Tankönyvkiadó, 1980.

Cover, Thomas M. and Thomas, Joy A.: Elements of Information Theory. Wiley, 2006.

Togneri, Roberto and de Silva, Christopher J. S.: Fundamentals of Information Theory and Coding Design. Chapman &amp; Hall/CRC, 2006.

Ash, Robert B.: Information Theory. Dover Publications, 1990.

**TTMME0412****Statisztikus tanuló algoritmusok****2+1 óra, 4+0 kredit, K****Tárgyfelelős: Dr. Fazekas István****Előfeltétele: nincs**

Neurális hálózatok, perceptron, többrétegű perceptron (MLP), error back-propagation, Radial Basis Function (RBF), tartó vektor gépek (SVM), deep learning, konvolúciós hálózat (CNN), autoencoder, rekurrens hálózat. Neurális hálózatok megvalósítása egy programcsomaggal.

**Irodalom:**

Fazekas I. Neurális hálózatok. Egyetemi jegyzet, Debreceni Egyetem, 2013.

Haykin, S.: Neural Networks. A Comprehensive Foundation. Prentice hall. New Jersey, 1999.

Matlab Neural Network Toolbox. The Mathworks, Inc., Natick, 1998.

Ian Goodfellow and Yoshua Bengio and Aaron Courville: Deep Learning. MIT Press, 2016.

## Képzési és kimeneti követelmények

**1. A mesterképzési szak megnevezése:** matematikus (Mathematics)

**Szakért felelős kar:** Természettudományi és Technológiai Kar  
**Szakfelelős:** Dr. Páles Zsolt egyetemi tanár

**2. A mesterképzési szakon szerezhető végzettségi szint és a szakképzettség oklevélben szereplő megjelölése:**

végzettségi szint: mester- (magister, master; rövidítve: MSc-)  
fokozat  
szakképzettség: okleveles matematikus  
a szakképzettség angol nyelvű megjelölése: Mathematician

**3. Képzési terület:** természettudomány

**4. A mesterképzésbe történő belépésnél előzményként elfogadott szakok:**

**4.1. Teljes kreditérték beszámításával vehető figyelembe:** a matematika alapképzési szak.

**4.2. A 9.3. pontban meghatározott kreditek teljesítésével elsősorban számításba vehető alapképzési szak:** a természettudomány, a műszaki, az informatika képzési területekről valamennyi alapképzési szak, a gazdaságtudományok képzési területéről a gazdaság- és pénzügy-matematikai elemzés alapképzési szak.

**4.3. A 9.3. pontban meghatározott kreditek teljesítésével vehetők figyelembe továbbá** azok az alapképzési és mesterképzési szakok, illetve a felsőoktatásról szóló 1993. évi LXXX. törvény szerinti szakok, amelyeket a kredit megállapításának alapjául szolgáló ismeretek összevetése alapján a felsőoktatási intézmény kreditátviteli bizottsága elfogad.

**5. Képzési idő:** 4 félév

**6. A mesterfokozat megszerzéséhez összegyűjtendő kreditek száma:** 120 kredit

A szak orientációja: kiemelten elméletorientált (70-80 százalék)

Alapozó ismeretek\* 0–20 kredit

Szakmai törzsanyag 40 kredit

Speciális modulok\* 34–54 kredit

A diplomamunka elkészítéséhez rendelt kreditérték 20 kredit

A szabadon választható tárgyakhoz rendelhető minimális kreditérték 6 kredit

**7. A szakképzettség képzési területek egységes osztályozási rendszere szerinti tanulmányi területi besorolása:** 461/0540

**8. A mesterképzési szak képzési célja és a szakmai kompetenciák:**

A képzés célja tudományos kutatásra szakmai felkészültséggel rendelkező matematikusok képzése, akik megszerzett matematikai szaktudásukat képesek alkotó módon a gyakorlatban is felhasználni. Nyitottak szakterületük és a rokon szakterületek új tudományos eredményeinek kritikus befogadására. Egyaránt alkalmasak elméleti és gyakorlati matematikai problémák modellezésére, megoldási eljárások kidolgozására és ezen eljárások tényleges folyamatának irányítására. Felkészültek tanulmányaik doktori képzésben történő folytatására.

## **8.1. Az elsajátítandó szakmai kompetenciák**

### **8.1.1. A matematikus**

#### **a) tudása**

Rendszerszinten és összefüggéseiben ismeri a matematika tudományának módszereit az analízis, algebra, számelmélet, geometria, diszkrét matematika, operációkutatás és valószínűségszámítás (matematikai statisztika) területén.

Összefüggéseiben ismeri az elméleti matematika eredményeit az analízis, algebra, számelmélet, geometria, diszkrét matematika, operációkutatás és valószínűségszámítás (matematikai statisztika) területén.

Jártas a matematika különböző részdiszciplínái közötti mélyebb, átfogóbb kapcsolatokban. Jártas az absztrakt matematikai gondolkodásban, a matematikai fogalomalkotásban.

Alkotó módon ismeri a matematikai bizonyítás alapelveit, módszereit.

Ismeri az új matematikai eredmények eléréséhez vezető kutatások speciális módszereit, problémamegoldó technikáit.

#### **b) képességei**

Képes az analízis, algebra, számelmélet, geometria, diszkrét matematika, operációkutatás és valószínűségszámítás (matematikai statisztika) területén elsajátított matematikai módszerek alkalmazására.

Magabiztosan és alkotó módon alkalmazza az absztrakt matematikai fogalmakat.

Képes a matematika modern eredményeinek, összefüggéseinek szintézisére és magas szintű, a tudománya eszközeivel megalapozott értékelésére.

Képes a szakterületén megkülönböztetni a tudományosan megalapozott és a kellően alá nem támasztott állításokat.

Képes a környező világban adódó jelenségek matematikai modelljei megalkotására, a modern matematika eredményeinek felhasználására a jelenségek megmagyarázása, leírása érdekében.

Képes a gyakorlati életben megfigyelhető összefüggések absztrakt szinten történő megragadására.

Képes a matematikai szakterület problémáit szakemberek és laikusok számára egyaránt szakszerűen megfogalmazni.

Képes a gyakorlati életben adódó döntéshelyzetek mögött esetlegesen rejlő optimalizációs problémák megfogalmazására, az azokból levonható következtetések nem-szakemberek számára való kommunikációjára.

Képes a matematikai eredmények, érvelések és az azokból származó következtetések világos bemutatására, a magyar és idegen nyelvű (angol) szakmai kommunikációra.

Képes a matematikai ismeretek alkotó jellegű integrálására és alkalmazására a természettudományok, gazdaságtudományok, műszaki és informatikai tudományok által felvetett problémák megoldásában.

Képes a műszaki és a gazdasági életben működő bonyolult rendszerek áttekintésére, matematikai elemzésére és modellezésére, döntési folyamatok előkészítésére.

Képes a számítástechnika eszközeinek alkalmazásával a természetben, a műszaki és gazdasági életben felmerülő számítási feladatok elvégzésére.

#### **c) attitűdje**

Törekszik a modern matematika új eredményeinek megismerésére.

Törekszik a modern matematika eredményeinek minél szélesebb körű alkalmazására.

Törekszik arra, hogy a megszerzett matematikai ismeretei segítségével megkülönböztesse a szakterületén a tudományosan megalapozott és a kellően alá nem támasztott állításokat.

Törekszik a matematika modern eredményei közötti további összefüggések meglátására, a felismert összefüggéseinek szintézisére és azok magas szintű, a tudománya eszközeivel megalapozott értékelésére.

Nyitott és fogékony a matematika területén elsajátított gondolatmenetek, módszerek, fogalmak új kutatási területeken való alkalmazására, új tudományos eredmények elérésére. Folyamatosan törekszik ismeretei bővítésére, új matematikai kompetenciák megszerzésére. Tudatában van annak, hogy a matematikai tanulmányai során szerzett speciális látásmódja segítheti a más tudományterületeken, alkalmazásokban felmerülő problémák innovatív megoldásában.

#### **d) autonómiája és felelőssége**

Felelősen, önkritikusan és reálisan ítéli meg a matematika területén megszerzett tudásának mértékét.

Megszerzett kritikai gondolkodásmódja és rendszerszerű gondolkodása révén felelősen vesz részt csoportmunkában, működik együtt akár más szakterületek képviselőivel.

Magas szintű matematikai ismeretei birtokában önállóan választja meg az egyes problémák megoldása során alkalmazandó módszereket, eljárásokat.

Tisztában van a matematikai gondolkodás, a precíz fogalomalkotás fontosságával, véleményét ezek figyelembe vételével alakítja ki.

Az absztrakt fogalomalkotásban, az elvont gondolkodásban való jártassága segítségével kialakított véleményét felelősen képviseli.

Tudományos kutatásai során fontosnak tartja, hogy azokat a legmagasabb az etikai normák figyelembe vételével végezze.

## **9. A mesterképzés jellemzői**

### **9.1. Szakmai jellemzők:**

9.1.1. A szakképzettséghez vezető tudományágak, szakterületek, amelyekből a szak felépül a matematikusképzést alapozó diszciplínák (algebra alapjai, analízis alapjai, geometria alapjai, valószínűségszámítás és matematikai statisztika alapjai) 15-25 kredit,

a matematikusképzés szakmai ismeretei 20-40 kredit

az alábbi ismeretkörök közül, a képzés tantervében meghatározott legalább négy ismeretkörből legalább négy témakör ismeretanyaga választandó:

a) algebra és számelmélet [Csoportelmélet. Permutációcsoportok. Csoport automorfizmusai, szemidirekt szorzat. Konjugáltság, normalizátor, centralizátor, centrum. Oszályegyenlet, Cauchy-tétel, Sylow-tételek. Véges  $p$ -csoportok. Nilpotens, illetve feloldható csoportok. A véges nilpotens csoportok jellemzése. Szabad csoportok, definiáló relációk. Szabad Abel-csoportok. A végesen generált Abel-csoportok alaptétele. Lineáris csoportok. Testelmélet. Testbővítés. Végesfokú bővítés, fokszám-tétel. Felbontási test, normális testbővítés. Véges testek. Tökéletes testek és végesfokú bővítéseik. Test algebrai lezártja. Galois-csoport, a Galoiselmélet főtétele. Radikálbővítés. A gyökjelekkel való megoldhatóság jellemzése. Ruffini-Abel-tétel. Gyökjelekkel megoldhatatlan racionális együtthatós algebrai egyenlet létezése. Algebrai feltétel geometriai alakzat szerkeszthetőségére körzővel és vonalzóval. Az algebrai kombinatorika elemei. Kvadrátikus kongruenciák, Legendre-szimbólum. Diszkrét logaritmus (index). Egyértelmű prímfaktorizáció kérdése bizonyos másodfokú számtestekben. Diofantikus problémák. Lánctörtek és alkalmazásaik.] 5-15 kredit;

b) analízis [Funkcionálanalízis elemei. Stone-Weierstrass-tétel. Banach-terek, korlátos lineáris transzformációk. Az  $L_p$ -terek duálisai, folytonos függvények terének duálisa, Hilbert-tér duálisa, reflexivitás. Hahn-Banach-tétel, Banach-Steinhaus-tétel, nyílt leképezések tétele és következményeik. Parciális differenciálegyenletek. A matematikai fizika modellegyenleteire kitérő kezdetiérték- és peremérték-problémák egzisztencia-, unicitás- és stabilitásvizsgálatai (húr rezgése, hővezetés, Laplace-egyenlet). A karakterisztikák módszere. Fourier-módszer. Maximum-minimum-elv lineáris egyenletekre. Green-függvény. A Dirichlet-probléma megoldása gömbben. Fourier-sorok. Fejér-tétel. A trigonometrikus rendszer teljessége.

Riemann-lemma. Konvergencia-kritériumok. Fourier-transzformált. Inverziós formula. Ortogonális polinomok. Laguerre-függvények teljessége. Laplace- transzformáció.] 5-15 kredit;

c) geometria [Differenciálgeometria és topológia. Sokaságok, szimpliciális felbontások. Kompakt felületek osztályozása. Homotópia. Sima sokaságok, tenzorok és differenciálformák. A d-operátor és Stokes tétele, bevezetés a de Rham-elméletbe. Riemann-metrika, görbület és geodetikusok felületeken. Gauss-Bonnet-tétel. Véges geometriák. Illeszkedési struktúrák. Projektív és affin síkok. Galois-geometriák. Kombinatorikai és csoportelméleti módszerek geometriai alkalmazásai. Véges algebrai geometria. Kódelméleti alkalmazások.] 5-15 kredit;

d) valószínűségszámítás és matematikai statisztika [Martingálok. Martingál, szub- és szupermartingál. Konvergenciatétel, reguláris martingálok. Doob-felbontás, négyzetesen integrálható martingálok konvergenciahalmaza. Megállási idők, Wald- azonosság. Markov-láncok. Diszkrét paraméterű Markov-láncok. Az állapotok osztályozása, periódus, átmeneti és visszatérő állapotok. Az átmenetvalószínűségek határértéke. Pozitív és nullállapotok. Stacionárius eloszlás, ergodikus Markov-láncok. Pontfolyamatok, Poisson-folyamat. Wiener-folyamat konstrukciója. Kvadratikus variáció. A trajektóriák analitikus tulajdonságai (folytonosság, nem-differenciálhatóság, Hölder-folytonosság). Faktoranalízis. Többszemponos szórásanalízis, szórásfelbontó táblázatok. Főkomponens- és faktoranalízis, a főkomponensek, faktorok becslése, a faktorszám meghatározása, faktorok forgatása.] 5-15 kredit;

e) diszkrét matematika [Testek alkalmazásai. Párosításelmélet, általános faktorok. Gráfok beágyazásai. Erősen reguláris gráfok, az egészségi feltétel és alkalmazásai. Leszámláló kombinatorika: generátorfüggvények, inverziós formulák, rekurziók. Mechanikus összegzés. Gráfelméleti alkalmazások (fák, feszítő fák, 1-faktorok száma). Véletlen módszerek: várható érték és második momentum módszer, véletlen gráfok, küszöbfüggvény. Extremális kombinatorika: extremális halmazrendszerekről és gráfokról szóló klasszikus tételek. Rendezés és kiválasztás, kupac. Dinamikus programozás. Gráfalgoritmusok: szélességi és mélységi keresés, feszítőfák, legrövidebb utak, párosítás páros gráfban, magyar módszer, folyamatok. Kereső fák, amortizációs idő, Fibonacci-kupac. Huffman-kód, Lempel-Ziv-Welch eljárása.] 5-15 kredit;

f) operációkutatás [Lineáris optimalizálás: klasszikus eredmények (pl. alternatíva tételek, dualitás, Minkowsky-Weyl-tétel); Pivot-algoritmusok (szimplex, crisscross); belsőpontos algoritmusok (logaritmikus barrier-módszer, Karmarkaralgoritmus); ellipszoid-algoritmus. Nemlineáris optimalizálás: konvex optimalizálás klasszikus eredményei (szeparációs tételek, konvex Farkas-tétel, Karush-Kuhn-Tucker-tétel, Lagrange-függvény és nyeregpont-tétel); módszerek (Newton-módszer, redukált gradiens módszer, belsőpontos algoritmus). Diszkrét optimalizálás: klasszikus eredmények (Max folyam min vágás, Egerváry-dualitás, Hoffman-tétel); poliéderes kombinatorika (teljesen unimoduláris mátrixok alkalmazásai, teljesen duális egészértékűség, párosítás poliéder); Gráfalgoritmusok (magyar-módszer, Edmonds- Karp-algoritmus, előfolyam-algoritmus, költséges áram); NP-teljes problémák algoritmikus megközelítései (dinamikus programozás, Lagrange-relaxáció, korlátozás és szétválasztás, mohó algoritmusok). Sztochasztikus programozás: alapmodellek (várható értékkel és valószínűséggel megfogalmazott, statikus és dinamikus); megoldó módszerek. Optimalizálásra vezető gyakorlati problémák (modellek)]. 5-15 kredit.

9.1.2. A sajátos kompetenciákat eredményező választható speciális modul 30-50 kredit

A következő modulokból legalább három választása szükséges úgy, hogy a választott modulok mindegyikéből legalább 10-10 kreditet kell teljesíteni, amelybe beszámíthatóak a

9.1.1. pont szerint előírt minimális kreditértéken felül teljesített kreditek is.

Az alábbi szakterületekről szerezhető speciális ismeret:

- a) algebra (algebrai kódelmélet, csoportelmélet, csoportok reprezentációelmélet, félcsoportelmélet, gyűrűelmélet, hálóelmélet, homológikus algebra, kommutatív algebra, univerzális algebra);
- b) számelmélet (additív számelmélet, az algebrai számelmélet elemei, diofantikus egyenletek, kongruenciák és alkalmazásai, konstruktív számelmélet);
- c) analízis (dinamikai modellek, komplex függvénytan, operátorelmélet, reprezentációelmélet, valós függvénytan);
- d) geometria (algebrai geometria, algebrai topológia, differenciál-topológia, diszkrét geometria, geometriai modellezés, hiperbolikus geometria, konvex halmazok, Lie-csoportok);
- e) sztochasztika (független növekményű folyamatok, határeloszlás-tételek, idősorok elemzése, információelméleti alapfogalmak, paraméteres és nemparaméteres próbák, statisztikai programcsomagok);
- f) diszkrét matematika (extremális kombinatorika, gráfelmélet, kódok és szimmetrikus struktúrák);
- g) operációkutatás (egészértékű programozás, folytonos optimalizálás, játékelmélet, kombinatorikus optimalizálás, matroid-elmélet, sztochasztikus optimalizálás, ütemezéselmélet).

### **9.2. Idegennyelvi követelmények:**

A mesterfokozat megszerzéséhez egy élő idegen nyelvből államilag elismert középfokú (B2), komplex típusú nyelvvizsga vagy ezzel egyenértékű érettségi bizonyítvány vagy oklevél szükséges.

### **9.3. A 4.2. és 4.3. pontban megadott oklevéllel rendelkezők esetén a mesterképzési képzési ciklusba való belépés minimális feltételei**

A mesterképzésbe való belépéshez a korábbi tanulmányokból szükséges minimális kreditek száma 65 kredit az algebra, az analízis, a geometria, a halmazelmélet, a kombinatorika, a matematikai logika, az operációkutatás, a számelmélet, a valószínűségszámítás, a statisztika területeiről. Ezen belül legfeljebb 10 kredit tartalomban beszámíthatók kiterjedt matematikai apparátusra épülő más tárgyak ismeretkörei is.

A mesterképzésbe való felvétel feltétele, hogy a hallgató a korábbi tanulmányai alapján legalább 50 kredittel rendelkezzen. A hiányzó krediteket a felsőoktatási intézmény tanulmányi és vizsgaszabályzatában meghatározottak szerint meg kell szerezni.